Seminarvortrag zur Astro- und Teilchenphysik

„Massenbestimmung mittels starkem Gravitationslinseneffekt“

Sebastian Müller

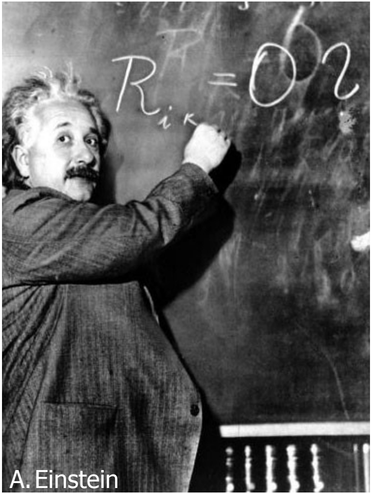
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen/Nürnberg

12. November 2007

Gliederung

1. Einsteins Relativitätstheorie
2. Die Theorie des Gravitationslinseneffekts
   - Punktmassen und diskrete Massenverteilungen als Linse
   - Ausgewählte Beispiele für Massenverteilungen
   - Kritische Linien & Kaustiken
3. Anwendungen des Starken Gravitationslinseneffekts
   - Bestimmung der Hubble-Konstanten H_0
   - Bestimmung der Linsenmasse

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

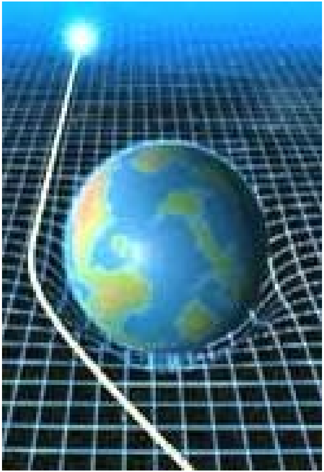


- Theoretische Grundlage für die Beschreibung des Gravitationslinseneffekts
- Veröffentlicht 1916 von Albert Einstein
- Beschreibt die Wechselwirkung zwischen Materie und Raumzeit

Quelle:

http://www.dradio.de/images/7091/portrait/

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) II



Grundidee: Raumzeit wird in Anwesenheit von Masse gekrümmt.

Bei sphärisch symmetrischer Massenverteilung: Beschreibung durch die *Schwarzschild-Metrik*:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2$$

$$-r^2\mathrm{d}\theta^2 - \left(r^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi^2$$

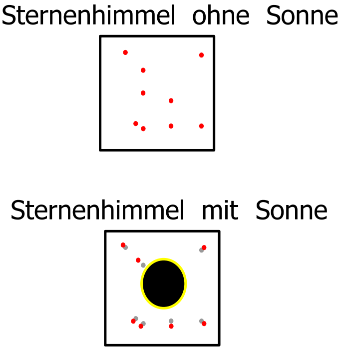
$\Longrightarrow$ Licht wird bei Anwesenheit von Masse abgelenkt

Quelle: `http://www.der-kosmos.de/pics/raumkruemmung_2.jpg`

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) III

Experimentelle Bestätigung erstmals gelungen am 29. Mai 1919 durch Sir Arthur Eddington bei Sonnenfinsternis in Brasilien

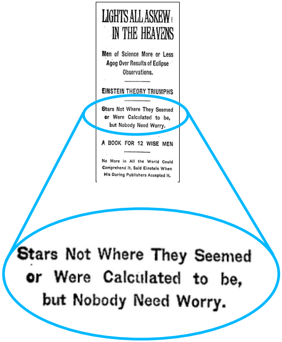
Sir A. S. Eddington



http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Eddington_2.jpeg

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) IV

The New York Times, 10. November 1919:


LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less Agog Over Results of Eclipse Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed or Were Calculated to be, but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could Comprehend It, Said Einstein When His Daring Publishers Accepted It.

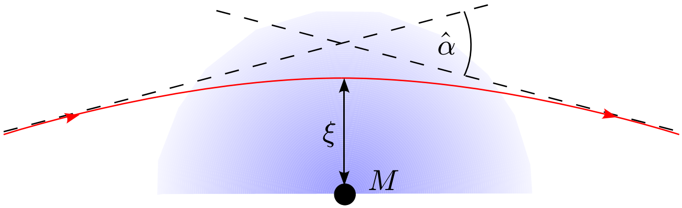
Stars Not Where They Seemed or Were Calculated to be, but Nobody Need Worry.

http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Jj-thomson2.jpg

Sir Joseph John Thomson, Präsident der Royal Society:

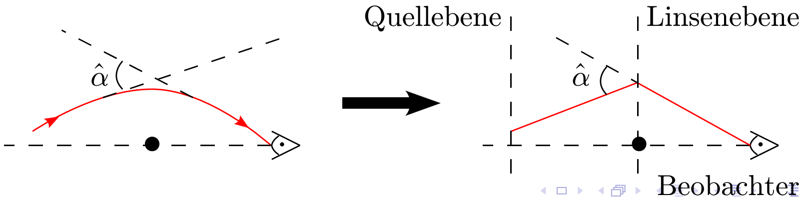
„*Dieses Resultat ist eine der größten Errungenschaften des menschlichen Denkens.*“

Der Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ für eine Punktmasse

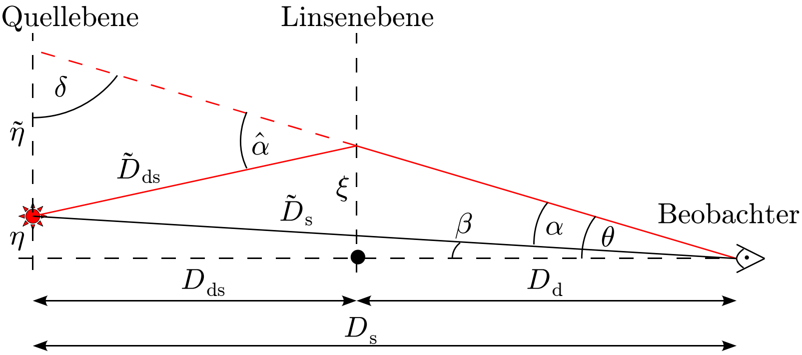


$$\mathit{ART} \implies \hat{\alpha} = \frac{4\gamma M}{c^2 \xi} \qquad (\hat{\alpha}_\odot \approx 1''\!\!,75)$$

Vereinfachung:



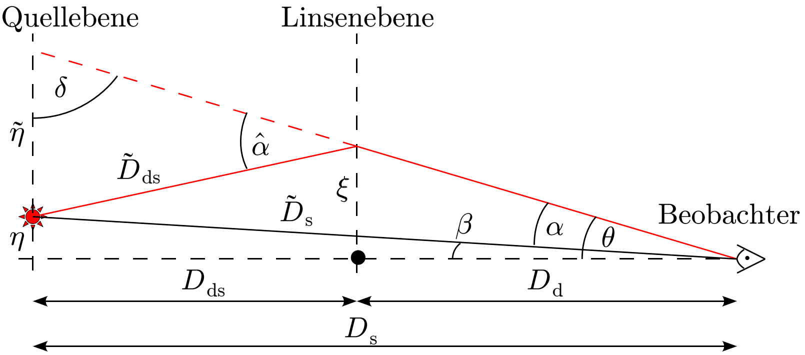
Der reduzierte Ablenkwinkel α



$$\frac{\sin\hat{\alpha}}{\tilde{\eta}} = \frac{\sin\delta}{\tilde{D}_{\mathrm{ds}}}, \quad \frac{\sin\alpha}{\tilde{\eta}} = \frac{\sin\delta}{\tilde{D}_{\mathrm{s}}} \implies \tilde{\eta} = \frac{\tilde{D}_{\mathrm{ds}}\sin\hat{\alpha}}{\sin\delta} = \frac{\tilde{D}_{\mathrm{s}}\sin\alpha}{\sin\delta}$$

$$\stackrel{\alpha,\hat{\alpha}\ll 1}{\Longrightarrow} \quad D_{\mathrm{ds}}\hat{\alpha} = D_{\mathrm{s}}\alpha \quad \implies \quad \boxed{\alpha = \frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\hat{\alpha}}$$

Die Linsengleichung



$$\alpha(\xi) = \frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\hat{\alpha} = \frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4\gamma M}{c^2 \xi} \quad , \quad \xi = D_{\mathrm{d}} \tan\theta \overset{\theta \ll 1}{\approx} D_{\mathrm{d}}\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha(\theta) = \frac{4\gamma M}{c^2}\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{d}}}\frac{1}{\theta} \qquad \boxed{\text{Linsengleichung} : \beta = \theta - \alpha(\theta)}$$

Allgemeine Lösung der Linsengleichung I

Ausgangspunkt: Linsengleichung

$$\beta = \theta - \frac{4\gamma M}{c^2} \frac{D_\mathrm{ds}}{D_\mathrm{d} D_\mathrm{s}} \frac{1}{\theta}$$

Definition: Einsteinwinkel

$$\theta_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{4\gamma M}{c^2} \frac{D_\mathrm{ds}}{D_\mathrm{d} D_\mathrm{s}}}$$

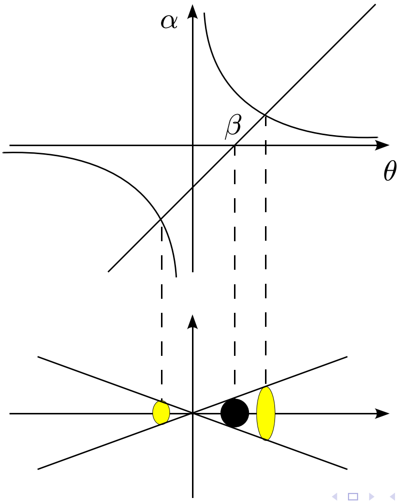
$\Longrightarrow$ Vereinfachung der Linsengleichung: $\beta = \theta - \dfrac{\theta_\mathrm{E}^2}{\theta}$

$\Longrightarrow$ Gleichung mit $\mathcal{O}(\theta^2)$: $\theta^2 - \beta\theta - \theta_\mathrm{E}^2 = 0$

$\Longrightarrow$ 2 Lösungen $\theta_\pm = \dfrac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_\mathrm{E}^2}\right)$

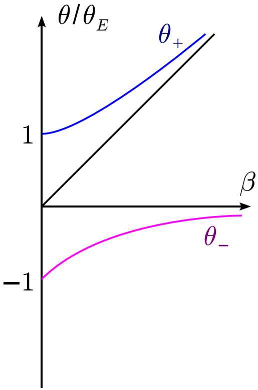
Allgemeine Lösung der Linsengleichung II

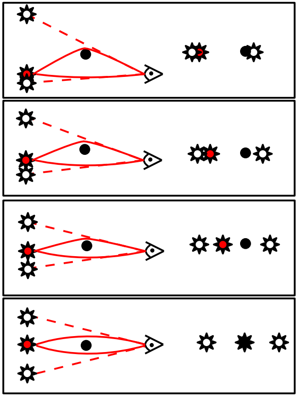
$\alpha(\theta) \propto 1/\theta$ zusammen mit $\beta = \theta - \alpha(\theta)$



Allgemeine Lösung der Linsengleichung III

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_{\mathrm{E}}^2}\right)$$

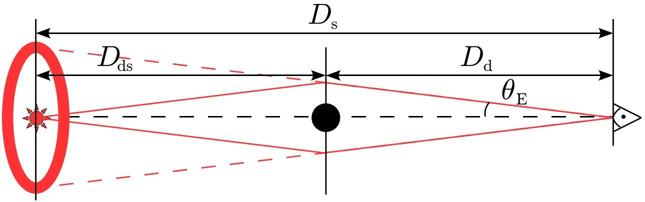




Der Einsteinwinkel θ_{E}

Annahme: Quelle, Linse und Beobachter sind kollinear (d.h. $\beta = 0$)

$$\Longrightarrow \quad \theta_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_{\mathrm{E}}^2}\right) = \pm\theta_{\mathrm{E}} = \pm\sqrt{\frac{4\gamma M}{c^2}\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}D_{\mathrm{d}}}}$$



$$\text{Beispiele mit } D_{\mathrm{d}} = D_{\mathrm{ds}}: \quad \begin{aligned} \theta_{\mathrm{E}}^{\odot} &\sim \mathcal{O}\,(\text{Bogensekunden}) \\ \theta_{\mathrm{E}}^{\mathrm{Andr}} &\sim \mathcal{O}\,(\text{Bogenminuten}) \\ \theta_{\mathrm{E}}^{\mathrm{Virgo}} &\sim \mathcal{O}\,(10^1\ \text{Bogenminuten}) \end{aligned}$$

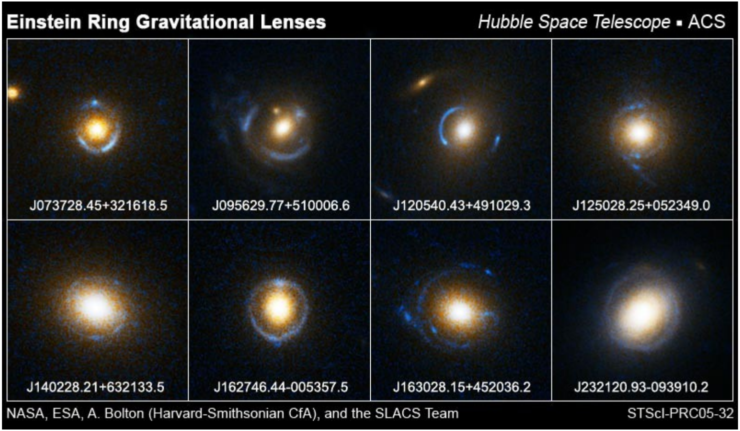
Beispiele zu Einsteinringen I

Aufnahme eines 8m Spiegels in Chile (ESO)

http://www.planetarium-hamburg.de/media/standard/Einsteinring.jpg

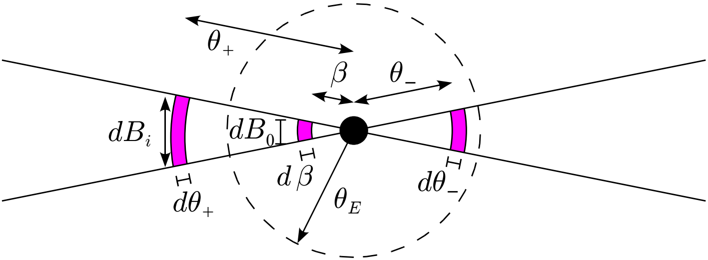
Beispiele zu Einsteinringen II

Mehrere Einsteinringe, aufgenommen mit dem HST



http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Einstein_Rings.jpg

Der Verstärkungseffekt I



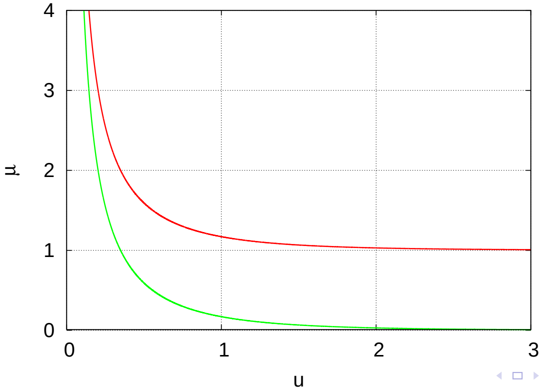
Verstärkung $\quad \mu = \dfrac{\text{Bildhelligkeit}}{\text{Quellhelligkeit}} = \dfrac{S_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}}{S_0\omega_0}$

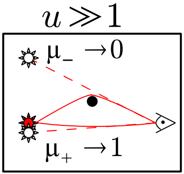
Satz von Liouville $\Longrightarrow \quad S_\mathrm{i} = S_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = \dfrac{\omega_\mathrm{i}}{\omega_0}$

$$\omega_{\mathrm{i}0} = B_{\mathrm{i}0} \begin{cases} \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{B_\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{B_0\mathrm{d}\beta} = \frac{\theta}{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}$$

Der Verstärkungseffekt II

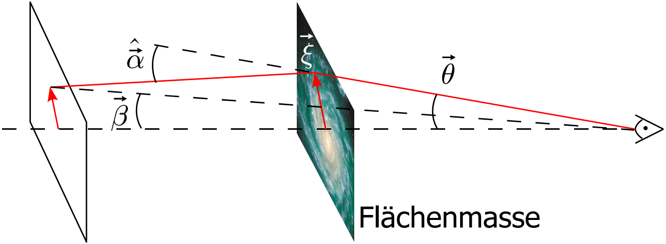
$$\mu_\pm = \frac{u^2+2}{2u\sqrt{u^2+4}} \pm \frac{1}{2} \qquad \left(u \equiv \frac{\beta}{\theta_\mathrm{E}}\right)$$





Punktförmige Linse $\longrightarrow$ Viele Punkte

Mehrere Massenpunkte $\Longrightarrow$ Superposition $\hat{\vec{\alpha}}(\vec{\xi}) = \sum_i \hat{\vec{\alpha}}_i(\vec{\xi})$



$$\hat{\vec{\alpha}}_i(\vec{\xi}) = \frac{4\gamma M_i}{c^2} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\vec{\alpha}}(\xi) = \frac{4\gamma}{c^2} \sum_i M_i \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2}$$

Viele Punkte $\longrightarrow$ Diskrete Massenverteilung

Übergang zu diskreter Massenverteilung: "$\sum \longrightarrow \int$"

$$\hat{\vec{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{4\gamma}{c^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} \, \mathrm{d}^2 \vec{\xi}',$$

wobei $\Sigma(\vec{\xi})$ die Flächenmassendichte der Linse am Ort $\vec{\xi}$ beschreibt.

Déjà-vu: Linsengl. $\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$, wobei $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}} \hat{\vec{\alpha}}(D_{\mathrm{d}} \vec{\theta})$

$\Longrightarrow$ Lösung $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \, \mathrm{d}^2 \vec{\theta}'$

mit $\kappa(\vec{\theta}) := \frac{\Sigma(D_{\mathrm{d}} \vec{\theta})}{\Sigma_{\mathrm{cr}}}$: Dimensionslose Flächenmassendichte

und $\Sigma_{\mathrm{cr}} := \frac{c^2}{4\pi\gamma} \frac{D_{\mathrm{s}}}{D_{\mathrm{d}} D_{\mathrm{ds}}}$: Kritische Flächenmassendichte

Die Jacobimatrix der Linsengleichung

Lokal lässt sich die Gravitationslinse durch die Jacobi-Matrix der Abbildung (Linsengleichung)

$$\mathcal{A}(\vec{\theta}) = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}$$

beschreiben. Die einzelnen Matrixelemente ergeben sich hierbei zu

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j}.$$

Es lässt sich nun zeigen, daß sich der Verstärkungsfaktor μ allgemein aus

$$\mu = \left|\det(\mathcal{A})\right|^{-1} = \left|\det\left(\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}\right)\right|^{-1}$$

bestimmen lässt.

Abbildungsgl. für axial-symmetr. Massenverteilungen I

Hierbei gilt, daß $\Sigma(\vec{\xi}) = \Sigma(|\vec{\xi}|) \equiv \Sigma(\xi)$. Der Ablenkwinkel $\hat{\vec{\alpha}}$ ist in diesem Fall immer nach innen gerichtet.

$$\hat{\vec{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{4\gamma}{c^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\vec{\xi'}) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi'}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2} \, \mathrm{d}^2\vec{\xi'} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\alpha}(\xi) = \frac{4\gamma M(\xi)}{c^2 \xi}$$

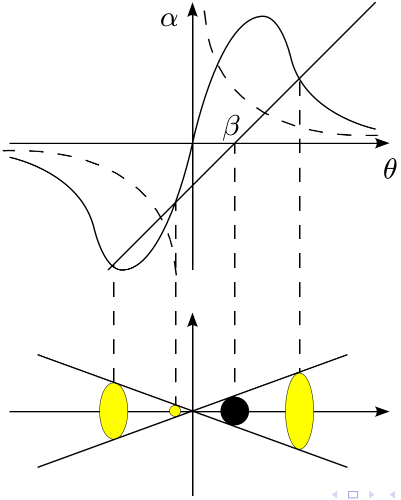
mit $M(\xi) := \int_0^\xi \Sigma(\xi') \, \mathrm{d}\xi'$ Masseninhalt bis ξ.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \kappa(\vec{\theta'}) \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta'}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|^2} \, \mathrm{d}^2\vec{\theta'} \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\theta) = \frac{m(\theta)}{\theta}$$

mit $m(\theta) := 2 \int_0^\theta \theta' \kappa(\theta') \, \mathrm{d}\theta'$ dimensionsloser Masseninhalt bis θ.

Abbildungsgl. für axial-symmetr. Massenverteilungen II

$\alpha(\theta) = m(\theta)/\theta$ zusammen mit $\beta = \theta - \alpha(\theta)$



Die isotherme Sphäre I

Annahme: Masse $M(r) \propto r \implies \rho(r) \propto 1/r^2$

Problem: Gilt nicht für $r \longrightarrow 0$ und $r \longrightarrow \infty$.
Trotzdem sehr gute Näherung!

$$\implies \Sigma(\xi) \propto 1/\xi \implies M(\xi) \propto \xi \overset{\hat{\alpha}(\xi) \propto \frac{M(\xi)}{\xi}}{\implies} \hat{\alpha}(\xi) = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c}\right)^2$$

σ_v: Geschwindigkeitsdispersion des Linsenobjekts

$$\implies \alpha(\theta) = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c}\right)^2 \left(\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\right) =: \theta_{\mathrm{E}} \text{ Einsteinwinkel}$$

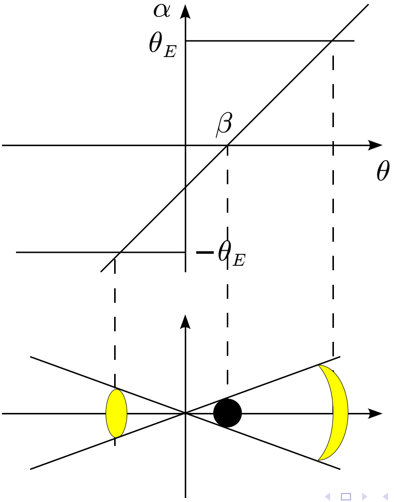
Lösungen der Linsengleichung $\beta = \theta - \theta_{\mathrm{E}}$:

- $|\beta| > \theta_{\mathrm{E}}$: Ein Bild auf Quellseite $\theta = \beta + \theta_{\mathrm{E}}$
- $|\beta| < \theta_{\mathrm{E}}$: Zwei Lösungen: $\theta_1 = \beta + \theta_{\mathrm{E}}$ und $\theta_2 = \beta - \theta_{\mathrm{E}}$

$$\implies \Delta\theta = 2\theta_{\mathrm{E}} = \mathrm{const}$$

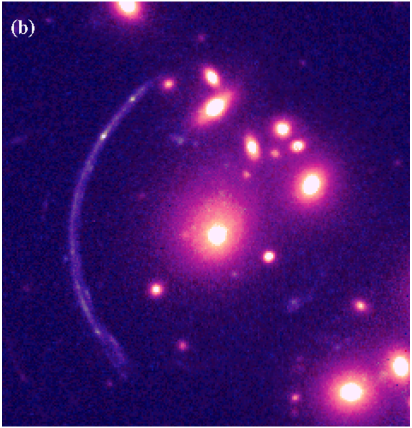
Die isotherme Sphäre II

$\alpha(\theta) = m(\theta)/\theta = \pm\theta_{\mathrm{E}}$ zusammen mit $\beta = \theta - \alpha(\theta)$



Beispiel zur isothermen Sphäre: Giant Arcs

Haufen C12244, entdeckt 1986



http://www.astro.uni-bonn.de/∼peter/Poster2d.html

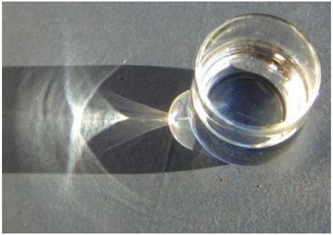
Kritische Linien & Kaustiken

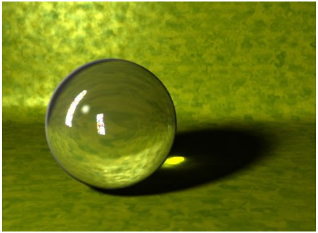
Es können Linseneffekte auftreten, für die formal gilt:

$$\mu \longrightarrow \infty$$

Aber: Aufgrund der Wellennatur des Lichtes gibt es keine "unendlichen" Verstärkungen!

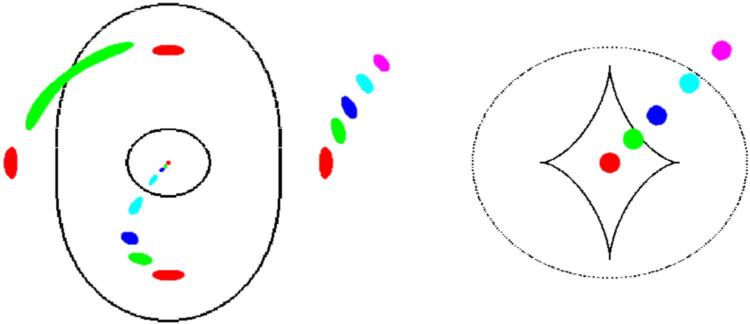
Allgemeine Beispiele: (aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Kaustik_%28Optik%29)





Geometrie einer elliptischen Linse I

Geometrie einer Elliptischen Linse:

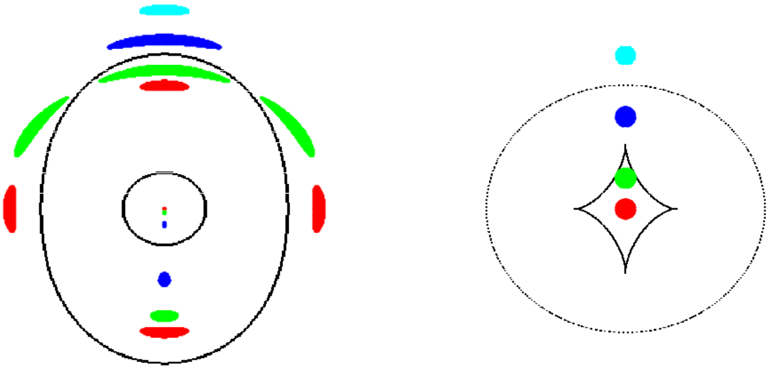


Links: Bildpositionen und Kritische Linien
Rechts: Quellpositionen und Kaustiken

aus: Peter Schneider: Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie

Geometrie einer elliptischen Linse II

Geometrie einer Elliptischen Linse:



Links: Bildpositionen und Kritische Linien
Rechts: Quellpositionen und Kaustiken

aus: Peter Schneider: Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie

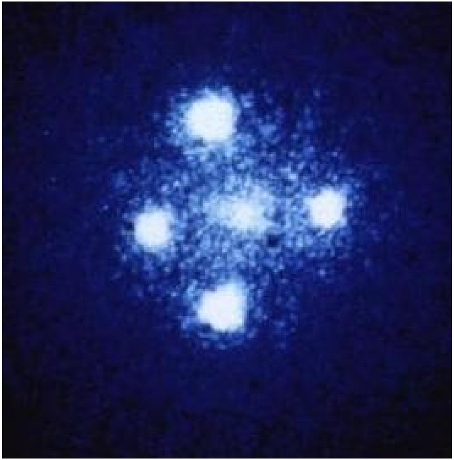
Beispiel einer elliptischen Linse I

Das Einsteinkreuz:

http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap070311.html

Beispiel einer elliptischen Linse II

Das Einsteinkreuz: 4 Bilder eines Quasars, aufgen. mit dem HST

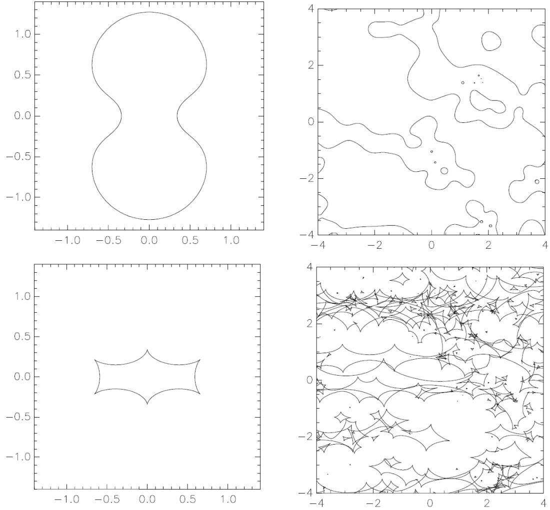


http://www.einstein-online.info/en/images/elementary/einsteincross_hst.jpg

Geometrie einer beliebigen Linse

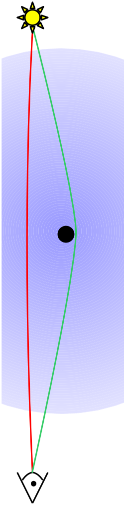
Kritische Linien

Kaustiken



aus: Andreas Helms: Anwendung des Mikrogravitationslinseneffekts zur Untersuchung astronomischer Objekte, Dissertation, Uni Potsdam

Time Delay $\Longrightarrow H_0$



Auftreten des sog. Time Delays bei Mehrfachbildern in Gravitationslinsen:

$$\begin{pmatrix}\text{time}\\\text{delay}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{geometric}\\\text{delay}\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{gravitational}\\\text{delay}\end{pmatrix}}_{\text{Shapiro}-\text{Effect}}$$

Man kann zeigen, daß der Time Delay $\tau \propto 1/H_0$.

Meßbar, falls die Quelle variiert.

$\Longrightarrow$ Hubble-Konstante bestimmbar.

Die Hubble-Konstante H_0: Meßergebnisse

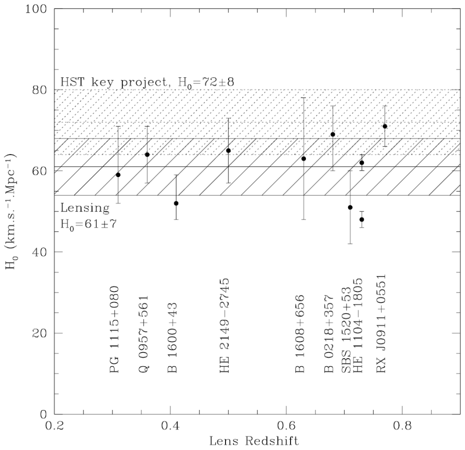


Figure 1. Time delay measurements of the Hubble constant, *circa* 2003 (Courbin 2003).

aus: The Hubble Constant from Gravitational Lens Time Delays, Paul L. Schechter, MIT

Prinzipielles Vorgehen bei isothermer Sphäre

- Bestimmung des Einsteinwinkels θ_E durch Messung des Bildabstands $\Delta\theta \overset{!}{=} 2\theta_\mathrm{E}$ bei Doppelbildern oder direkten Fit eines Einsteinrings mit Radius θ_E durch einen Giant Arc.
- Linsengleichung: $\beta = \theta - m(\theta)/\theta \quad \xrightarrow{\text{falls } \beta=0} \quad \theta = m(\theta)/\theta$
- Für $\beta = 0$ muß aus Symmetriegründen gelten, daß $\theta_+ \overset{!}{=} \theta_-$. Somit ist hier $\theta = \theta_\mathrm{E}$.

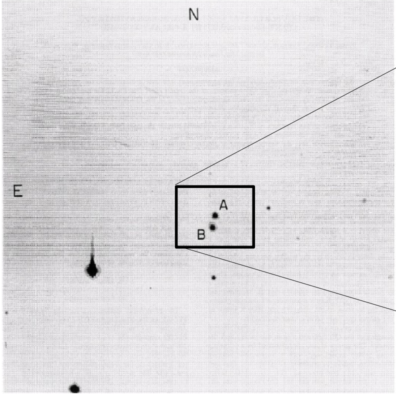
$$\Longrightarrow \quad \theta_\mathrm{E}^2 = m(\theta_\mathrm{E}) = \frac{4\gamma M(\theta_\mathrm{E})}{c^2} \frac{D_\mathrm{ds}}{D_\mathrm{d} D_\mathrm{s}}$$

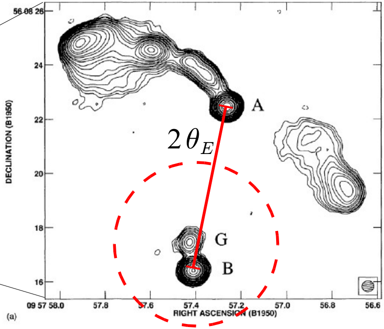
- Linsenmasse innerhalb des Einsteinradius bestimmbar:

$$M(\theta_\mathrm{E}) = \frac{\theta_\mathrm{E}^2 c^2}{4\gamma} \frac{D_\mathrm{d} D_\mathrm{s}}{D_\mathrm{ds}}$$

$\Longrightarrow$ **Sehr genaue Möglichkeit, Massen in der extragalakt. Astronomie zu bestimmen (Ungenauigkeiten bis hin zu wenigen Prozent)**

Der Doppelquasar QSO 0957+561



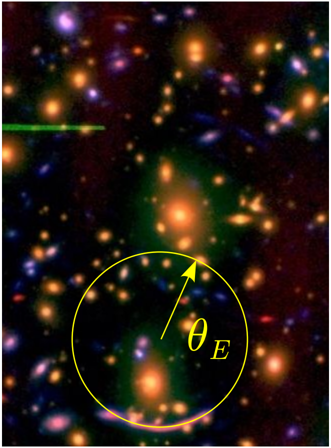


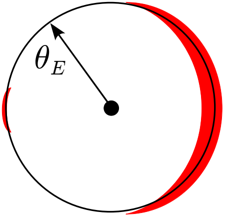
aus: Peter Schneider: Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie

$$2\theta_{\mathrm{E}} \approx 6\overset{\prime\prime}{.}1 \quad \Longrightarrow \quad M(\theta_{\mathrm{E}}) \gg M_{\mathrm{erwartet}}(\theta_{\mathrm{E}})$$

$\Longrightarrow$ Linseneffekt hervorgerufen durch Galaxienhaufen anstatt durch Einzelgalaxie

Giant Arcs: Der Superhaufen A 370





$$\Longrightarrow \quad M(\theta_{\mathrm{E}}) \approx 6,6 \cdot 10^{13} M_\odot$$

Fazit: Masse-Leuchtkraft-Verhältnis:

$$\left[\left(\frac{M}{L}\right)_{\text{gemessen}} \Big/ \left(\frac{M}{L}\right)_{\text{erwartet}} \right] \overset{\lightning\lightning}{\approx} 100$$

http://www.ifa.hawaii.edu/users/cowie/z6/a370_z6red.jpg

Literaturverzeichnis

- Peter Schneider: Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie, Springer-Verlag
- Ramesh Narayan und Matthias Bartelmann: Lectures on gravitational lensing, http://www.ita.uni-heidelberg.de/∼msb/Publications/Proceedings/JeruLect.pdf
- Andreas Helms: Anwendung des Mikrogravitationslinseneffekts zur Untersuchung astronomischer Objekte, Dissertation, Uni Potsdam
- Stella Seitz: Astrophysikalisches Praktikum: Der starke Gravitationslinseneffekt, Universitäts-Sternwarte München
- Matthias Bartelmann: Der Einfluß einer Kombination von Mikro- und Makrolinsen auf die Statistik kosmologische Objekte, Diplomarbeit, LMU München
- John A. Peacock: Cosmological Physics, Cambridge University Press
- Sjur Refsdal (Hamburg Observatory, Germany) & Jean Surdej (Institut d'Astrophysique Liège, Belgium): Gravitational Lenses

Danke schön!!!

Vielen Dank für die freundliche Aufmerksamkeit!

Besonders bedanken möchte ich mich bei den Herren Profs

- Jörn Wilms
- Uli Heber

für die vielen nützlichen Tips allgemein zu Präsentationen und speziell dem Thema des Gravitationslinseneffekts!

Außerdem bei meiner Theo-Übungspartnerin Stefanie Wagner, die in letzter Zeit viele Theo-Hausaufgaben wie selbstverständlich alleine erledigt hat. Sorry!