Neutrinooszillationen

Das Konzept

Felix Fleischmann

Erlangen Center for Astroparticle Physics

08. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

Eine kurze Geschichte des Neutrinos

- 1920er β-Zerfall scheint verschiedene Erhaltungssätze zu verletzen.

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu_e}$$

- 1930 Wolfgang Pauli postuliert das Neutrino (allerdings unter dem Namen „Neutron“).
- 1934 Enrico Fermi verwendet den Begriff Neutrino
- 1956 Frederick Reines und Clyde Cowan weisen Antineutrinos durch „inversen β-Zerfall“ nach. (Nobelpreis 1995)

$$p + \overline{\nu_e} \rightarrow n + e^+$$

Eine kurze Geschichte des Neutrinos

- 1957 Bruno Pontecorvo vermutet verschiedene Neutrino-Familien.
- 1962 Nachweis von Myon-Neutrino und Myon-Antineutrino durch Schwartz, Lederman und Steinberger (Nobelpreis 1988).
- 1975 Entdeckung des τ am SLAC (Nobelpreis 1995 für Martin Lewis Perl) und Postulat der dritten Neutrino-Familie
- 2000 Im DONUT Experiment werden τ-Neutrinos nachgewiesen.

Eigenschaften der Neutrinos im Standardmodell

- Neutrinos tragen Spin $\frac{1}{2}$ (Fermionen).
- Neutrinos sind stabil.
- Neutrinos wechselwirken schwach und gravitativ.
- Neutrinos wechselwirken nicht elektromagnetisch und nicht stark.
- Es gibt genau drei verschiedene Neutrino-Flavours: ν_e, ν_μ, ν_τ
- Jedes Neutrino besitzt ein Antiteilchen: $\overline{\nu_e}, \overline{\nu_\mu}, \overline{\nu_\tau}$
- Neutrinos sind masselos.
- Neutrinos besitzen Helizität -1, Antineutrinos +1.

Eigenschaften der Neutrinos im Standardmodell

Berechtigte Fragen an das Standardmodell:

- Sind Neutrinos wirklich masselos?
- Sind Neutrino und Antineutrino identische Teilchen (Majorana-Neutrino) oder voneinander verschiedene Teilchen (Dirac-Neutrino)?
- Ist die Leptonflavourzahl streng erhalten?

Exkurs: Leptonflavourzahl

Es gibt drei Familien von Lepton-Dubletten:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

Jedes Teilchen einer jeden Familie besitzt eine festgelegte Leptonflavourzahl $L_e, L_\mu, L_\tau = 1$. Die Antiteilchen entsprechend $L_e, L_\mu, L_\tau = -1$. Das Standardmodell geht davon aus, dass die Summe der einzelnen Leptonflavourzahlen erhalten ist.

Neutrinooszillationen

Motivation für Neutrinooszillationen:

- 1957 weist Pontecorvo auf eine mögliche Existenz von Neutrinooszillationen hin.
- Indiz: „Fehlende“ solare Neutrinos
- Beantwortet die Frage nach Masse und Leptonflavourzahlerhaltung.

Neutrinooszillationen

Was aber sind Neutrinooszillationen?

Neutrinooszillationen

Unter Neutrinooszillationen versteht man oszillierende Übergänge, in denen sich eine Neutrinoart in eine andere mit verschiedenen Leptonflavourzahlen umwandeln kann.

Bedingungen:

- Nicht alle Neutrinos haben dieselbe Masse.
- Nicht alle Neutrinos sind masselos.
- Die Leptonflavourzahlen sind nicht streng erhalten.

Neutrinooszillationen

Idee der Neutrinooszillationen:

- Die Neutrinoarten ν_α mit fester Leptonflavourzahl L_α heißen *Flavoureigenzustände* $|\nu_\alpha\rangle \hat{=} |\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$
- Es gilt: $\langle\nu_\alpha|\nu_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$
- Sie sind keine Eigenzustände des *Massenoperators* M: $\langle\nu_\alpha|M|\nu_\beta\rangle \neq 0$.
- Sie sind Linearkombinationen von *Masseneigenzuständen* $|\nu_i\rangle$ mit festen Massen m_i:

$$\langle\nu_i|M|\nu_j\rangle = m_i\delta_{ij} \;; \quad m_i - m_j \neq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Im Klartext: Die $|\nu_i\rangle$ entwickeln sich mit unterschiedlichen Phasen. Das heißt ein reiner Flavourzustand $|\nu_\alpha\rangle$ wird eine zeitabhängige Mischung verschiedener Flavourzustände und im Experiment wird mit einer (oszillierenden) Wahrscheinlichkeit eine Neutrinoart $|\nu_\beta\rangle$ mit $\beta \neq \alpha$ angetroffen.

Zeitentwicklung

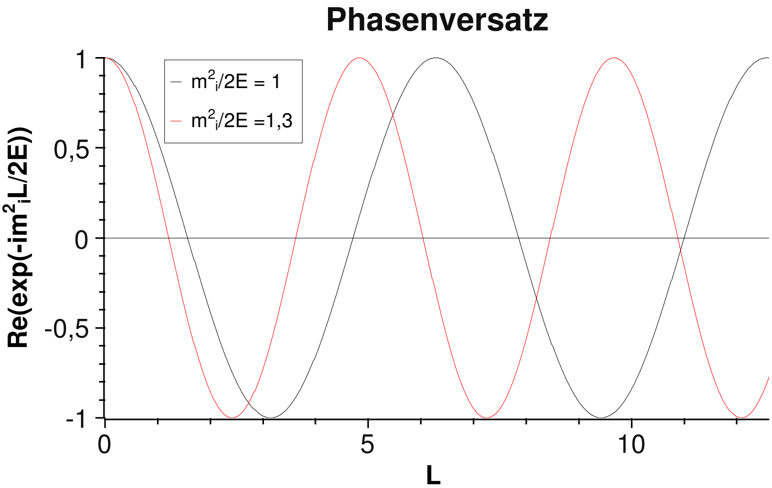
- Quantenmechanik: $|\nu_i(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t}\,|\nu_i\rangle$
- In $|\nu_i\rangle$ steckt noch die Ortsabhängigkeit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$
- $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p}$ $(p >> m_i)$
- Da Neutrinos praktisch Lichtgeschwindigkeit besitzen gilt auch noch $t \approx x \approx L$ und $p \approx E$

$$-(E_i t + px) \approx -(p + \frac{m_i^2}{2p})t + px \approx -(p + \frac{m_i^2}{2p})x + px =$$

$$= -\frac{m_i^2}{2p}x \approx -\frac{m_i^2}{2E}x = -\frac{m_i^2}{2E}L$$

$$\Longrightarrow |\nu_i(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m_i^2}{2E}L}\,|\nu_i\rangle$$

Zeitentwicklung



Der Fall n=2

Falls nur zwei Neutrinoflavours signifikant mischen (z.B. $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$), dann

- gibt es einen Mischungswinkel,
- und eine Massendifferenz δm^2.

Die zugehörige Transformation lautet also:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben lauten die Gleichungen dann:

$$|\nu_e\rangle = \cos\Theta\,|\nu_1\rangle + \sin\Theta\,|\nu_2\rangle$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\Theta\,|\nu_1\rangle + \cos\Theta\,|\nu_2\rangle$$

$$|\nu_1\rangle = \cos\Theta\,|\nu_e\rangle - \sin\Theta\,|\nu_\mu\rangle$$

$$|\nu_2\rangle = \sin\Theta\,|\nu_e\rangle + \cos\Theta\,|\nu_\mu\rangle$$

Der Fall n=2

Betrachte nun Übergang $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$:

Zeitentwicklung: $|\nu_e(t)\rangle = \cos\Theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m_1^2}{2E}L}|\nu_1\rangle + \sin\Theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m_2^2}{2E}L}|\nu_2\rangle$

Gesucht wird die Amplitude: $A(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) \equiv \langle\nu_\mu|\nu_e(t)\rangle$

Einsetzen liefert:

$$A(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = -\sin\Theta\cos\Theta e^{-\mathrm{i}\frac{m_1^2}{2E}L} + \sin\Theta\cos\Theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m_2^2}{2E}L}$$

Der Fall n=2

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten müssen die Amplituden quadriert werden. Mit den Abkürzungen
$\Delta_{12} = \frac{\delta m_{12}^2}{2} \cdot \frac{L}{E} = 2\pi \frac{L}{L_0}$ und $\delta m_{12}^2 = m_2^2 - m_1^2$
ergibt sich:

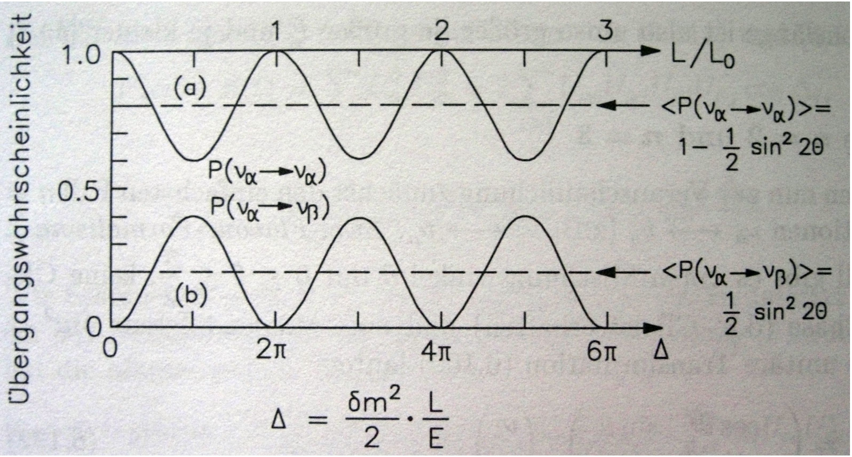
$$P(\nu_e \to \nu_e) = P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = P(\overline{\nu_e} \to \overline{\nu_e}) = P(\overline{\nu_\mu} \to \overline{\nu_\mu}) =$$

$$= 1 - \sin^2(2\Theta) \cdot \sin^2(\frac{\Delta_{12}}{2})$$

und

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = P(\nu_\mu \to \nu_e) = P(\overline{\nu_e} \to \overline{\nu_\mu}) = P(\overline{\nu_\mu} \to \overline{\nu_e}) =$$

$$= \sin^2(2\Theta) \cdot \sin^2(\frac{\Delta_{12}}{2}) = 1 - P(\nu_e \to \nu_\mu)$$


Übergangswahrscheinlichkeit
1.0
0.5
0
0
2π
4π
6π
Δ
1
2
3
L/L0
(a)
(b)
P(να→να)
P(να→νβ)
<P(να→να)>= 1− 1/2 sin² 2θ
<P(να→νβ)>= 1/2 sin² 2θ
Δ = δm²/2 · L/E

Der Fall n=3

Falls alle drei Neutrinoflavours signifikant mischen, dann

- gibt es drei Mischungswinkel $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$,
- eine CP verletzende Phase δ
- und zwei unabhängige Massendifferenzen δm_{ij}^2.

Die zugehörige Transformation lautet also:

$$U = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \end{pmatrix}$$

mit $s_i = \sin\Theta_i, \; c_i = \cos\Theta_i$

Der Fall n=3

Ausrechnen der Übergangswahrscheinlichkeiten mühsam. Mögliche Approximation:

- Diagonalelemente dominant
  $\Rightarrow m(\nu_e) \approx m_1, m(\nu_\mu) \approx m_2, m(\nu_\tau) \approx m_3$
- $m_1 \approx m_2 << m_3 \Rightarrow \Delta_{12} \approx 0$

$$\Longrightarrow P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \approx 4 U_{e3}^2 U_{\mu 3}^2 \sin^2(\frac{\Delta}{2})$$

(indirekte Neutrinooszillation)

Allgemeiner Fall

Flavoureigenzustände und Masseeigenzustände hängen über eine unitäre Transformation U miteinander zusammen:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \ , \ |\nu_i\rangle = \sum_\alpha (U^\dagger)_{i\alpha} |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U^*_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$$

(Für Antineutrinos ersetze $U_{\alpha i}$ durch $U^*_{\alpha i}$)
$\Rightarrow$ Ein zur Zeit $t = 0$ reiner Flavourzustand $|\nu_\alpha\rangle$ entwickelt sich zu:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t} |\nu_\beta\rangle$$

Allgemeiner Fall

Die Übergangsamplitude für den Flavourübergang $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ lautet also:

$$A(\alpha \to \beta; t) \equiv \sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} E_i t} = \sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \frac{m_i^2}{2} \cdot \frac{L}{E}}$$

Für Antineutrinos ergibt sich:

$$A(\overline{\alpha} \to \overline{\beta}; t) \equiv \sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} E_i t}$$

Daran liest man ab:

$$A(\overline{\alpha} \to \overline{\beta}) = A(\beta \to \alpha) \neq A(\alpha \to \beta)$$

(was auch direkt aus dem CPT-Theorem folgen würde)

Allgemeiner Fall

Zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten müssen die Amplituden quadriert werden:

Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(\alpha \to \beta; t) = \delta_{\alpha\beta} - 2\mathrm{Re} \sum_{j>i} U_{\alpha i} U^*_{\alpha j} U^*_{\beta i} U_{\beta j} \left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta_{ij}}\right]$$

mit $\Delta_{ij} = \frac{\delta m^2_{ij}}{2} \cdot \frac{L}{E}$

Oszillationen in Materie

Für den Fall n=2 gilt:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Schrödinger-Gleichung der Masseeigenzustände im Vakuum:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\,|\vec{\nu}(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = H^i\,|\vec{\nu}(t)\rangle$$

Transformation in den Flavourraum:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\,|\vec{\nu'}(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = H^\alpha\,|\vec{\nu'}(t)\rangle \;\; ; \;\; H^\alpha = UH^iU^\dagger$$

Explizit lauten die Hamiltonmatrizen:

$$H^i = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}$$

$$H^\alpha = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2^2 - m_1^2}{4p} \begin{pmatrix} -\cos 2\Theta & \sin 2\Theta \\ \sin 2\Theta & \cos 2\Theta \end{pmatrix}$$

Fall n=2

In Materie kommt es zu elastischer νe-Streuung.

- Für alle Neutrinosorten findet NC-Wechselwirkung statt
- Aber: Für $\nu_e e$ kommt CC-Wechselwirkung hinzu

Daraus resultiert für ν_e ein effektiv wirkendes Potential $V = \sqrt{2} G_F N_e$.
Aus der Energie-Impuls-Beziehung ergibt sich:

$$p^2 + m_{ee}^2 = (E - V)^2 \overset{V<<E}{\approx} E^2 - 2EV$$

Das heißt $m_{ee}^2 \to m_{eem}^2 = m_{ee}^2 + A$ mit $A = 2\sqrt{2} G_F N_e E$

Fall n=2

Die Hamiltonmatrix im Flavourraum hat nun folgende Gestalt:

$$H_m^\alpha = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 + A & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix}$$

In der Massendarstellung führt das zusätzliche Potential zu:

$$H^i = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 + A\cos^2\Theta & A\cos\Theta\sin\Theta \\ A\cos\Theta\sin\Theta & m_2^2 + A\sin^2\Theta \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren liefert die neuen Materieeigenzustände sowie folgende Differenz zwischen beiden:

$$D_m = D\sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\Theta\right)^2 + \sin^2 2\Theta} \quad ; \quad D \equiv \delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Fall n=2

Als nächstes wird eine neue Mischungsmatrix U_m mit einem Mischungswinkel Θ_m eigeführt:

$$U_m = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix}$$

Zwischen Vakuum- und Materiemischungswinkel bestehen folgende Beziehungen:

$$\tan 2\Theta_m = \frac{\sin 2\Theta}{\cos 2\Theta - \frac{A}{D}} \; ; \; \sin 2\Theta_m = \frac{\sin 2\Theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\Theta\right)^2 + \sin^2 2\Theta}}$$

Damit ist das Ziel erreicht und die Oszillationswahrscheinlichkeiten können jetzt explizit angegeben werden.

Fall n=2

Übergangswahrscheinlichkeiten in Materie

$$P_m(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\Theta_m) \cdot \sin^2(\frac{\Delta_m}{2})$$

und

$$P_m(\nu_e \to \nu_e) = 1 - P_m(\nu_e \to \nu_\mu)$$

mit $\Delta = \frac{D_m}{2} \cdot \frac{L}{E}$

MSW-Effekt

Betrachten wir die Oszillationsamplitude genauer:

$$\sin^2 2\Theta_m = \frac{\sin^2 2\Theta}{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\Theta\right)^2 + \sin^2 2\Theta}$$

Man kann drei verschiedene Fälle unterscheiden:

MSW-Effekt

$$\sin^2 2\Theta_m = \frac{\sin^2 2\Theta}{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\Theta\right)^2 + \sin^2 2\Theta}$$

- $\frac{A}{D} = 0 \Rightarrow$ Vakuumfall
- $\frac{A}{D} >> 1$ (hohe Elektronendichte) $\Rightarrow$

$$\sin^2 2\Theta_m = \frac{\sin^2 2\Theta}{\left(\frac{A}{D}\right)^2} \approx 0$$

- $\frac{A}{D} \approx \cos 2\Theta$ (Resonanzfall) $\Rightarrow \sin^2 2\Theta_m = 1$

MSW-Effekt

Das ist beachtlich! Die Wahrscheinlichkeit oszilliert somit zwischen 0 und 1 *unabhängig* vom Vakuummischungswinkel.

Keine Resonanz für Antineutrinos

Für Antineutrinos tritt keine Resonanz auf, da $\frac{A}{D} + \cos 2\Theta$ nicht verschwinden kann!

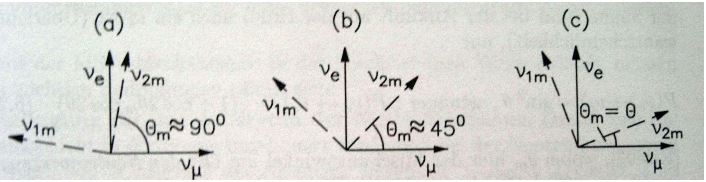
MSW-Effekt am Beispiel Sonne

- $|\nu_e\rangle$ wird bei hoher N_e erzeugt
  $\Rightarrow |\nu_e\rangle = |\nu_{1m}\rangle \cos\Theta_m + |\nu_{2m}\rangle \sin\Theta_m \approx |\nu_{2m}\rangle$
- Bewegung nach außen $\Rightarrow N_e$ ändert sich $\Rightarrow \Theta_m$ ändert sich
- Aufgrund langsamer Dichteänderung bleibt das Neutrino aber im $|\nu_{2m}\rangle$-Zustand (Adiabatizität)
- Beim Durchqueren der Resonanzzone:
  $|\nu_{2m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_e\rangle + |\nu_\mu\rangle)$. Maximale Mischung!
- Am Rand der Sonne:
  $\Theta_m = \Theta \Rightarrow |\nu_{2m}\rangle = |\nu_e\rangle \sin\Theta + |\nu_\mu\rangle \cos\Theta$

MSW-Effekt am Beispiel Sonne

Flavourflip

Es hat eine Inversion der Neutrinoart stattgefunden. $|\nu_{2m}\rangle$ hat sich in der (ν_e, ν_μ)-Ebene um fast 90° im Uhrzeigersinn gedreht.



MSW-Effekt am Beispiel Sonne

Überlebenswahrscheinlichkeit

$$P(\nu_e \to \nu_e) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Theta_m \cos 2\Theta) \approx \sin^2 \Theta$$

$\Longrightarrow$ Je kleiner der Vakuummischungswinkel, umso größer ist die Flavourflipwahrscheinlichkeit!

Konsequenzen

Was folgt daraus für das Standardmodell?

- Mindestens ein Neutrino besitzt eine Masse.
- Zumindest die Massendifferenzen können experimentell bestimmt werden.
- Leptonflavourzahl ist nicht streng erhalten.

Das steht zwar nicht im krassen Widerspruch mit dem Standardmodell, erfordert aber dennoch leichte Modifikationen, wenn es Neutrinooszillationen wirklich gibt.

Experimentelle Evidenzen

Wie sieht es aber mit konkreten Belegen durch Experimente aus?
$\Rightarrow$ Dazu nächste Woche mehr im Vortrag über Experimente zu Neutrinooszillationen.

Quellen

(1) Schmitz, N., Neutrinophysik, B. G. Teubner Stuttgart, 1997;
(2) Genz, H., Elementarteilchen, Fischer Taschenbuch Verlag Frankfurt am Main, 2003;
(3) Bahcall, J. N., Neutrino Astrophysics, Cambridge University Press, 1989;
(4) Fukugita, M., Yanagida, T., Physics of Neutrinos, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003;
(5) Povh, B., Rith, K., Scholz, C., u.a., Teilchen und Kerne, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009;
(6) Perkins, D., Particle Astrophysics, Oxford University Press, 2009;
(7) http://pdg.lbl.gov/2009/reviews/rpp2009-rev-neutrino-mixing.pdf