



Frage 1: Entwicklung von Universen

In der Vorlesung hatten wir die Friedmann-Gleichung hergeleitet als

$$\dot{R}^2 = + \frac{8\pi G\rho}{3} R^2 - kc^2 \quad (1.1)$$

- a) Warum gilt für normale Materie ("Staub") $\rho_m(t) \propto R(t)^{-3}$?
- b) Wir betrachten jetzt ein nur von Materie gefülltes, flaches Universum, d.h. den Fall $k = 0$. Dieser Fall wird das "Einstein-de Sitter-Universum" genannt. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ("heute") sei die Dichte des Universums $\rho(t_0) = \rho(0)$.

- i) Zeigen Sie, dass die Friedmann-Gleichung unter diesen Annahmen geschrieben werden kann als

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{R_0^3}{R(t)} \quad (1)$$

wo $R_0 = R(t_0)$.

- ii) Lösen Sie die Friedmann-Gleichung unter der Randbedingung $R(0) = 0$.

(Lösung: $R(t) \propto t^{2/3}$)

- iii) Der Hubble-Parameter ist gegeben durch $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$. Zeigen Sie, dass das Alter des materiedominierten Universums gegeben ist durch $t_0 = 2/(3H_0)$ wo $H_0 = H(t_0)$.

- c) **Diese Teilaufgabe ist freiwillig.** In Teilaufgabe a) hatten wir eine Entwicklungsgleichung für die Dichte von Teilchen betrachtet. Für allgemeine Gase muss die zeitliche Entwicklung der Dichte aus ihrer Zustandsgleichung hergeleitet werden. Wir können dabei das Verhalten des Gases (=Licht, Galaxien, dunkle Materie) aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik herleiten,

$$dE + p dV = T dS \quad (1)$$

- i) Relativistisch betrachtet ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho c^2 \quad (1)$$

Bestimmen Sie für ein expandierendes Universum dE/dt und dV/dt .

- ii) Die Expansion des Universums kann als reversibel angesehen werden, d.h. Sie können ansetzen $dS = 0$. Zeigen Sie, dass mit den Ergebnissen aus der obigen Teilaufgabe folgt

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Diese Gleichung ist die "Flüssigkeitsgleichung", sie zeigt, dass zwei Terme für die Änderung der Dichte im Universum verantwortlich sind, einer Verdünnung aufgrund der Ausdehnung des Universums und einem Energieverlust, da das Material mit der Ausdehnung Arbeit leistet. Beachten Sie, dass dies *nicht* bedeutet, dass der Gasdruck bei der Expansion hilft (da der Druck überall gleich gross ist, wirkt keine Kraft!).

- iii) Das in der vorherigen Teilaufgabe betrachtete materiedominierte Universum entsprach dem Fall $p = 0$, d.h. es wurde angenommen, dass die Gravitation den Gasdruck vollständig dominiert. Sobald Material relativistisch heiss ist, ist das nicht mehr der Fall, sondern es gilt eine allgemeinere Zustandsgleichung der Form $p = (\gamma - 1)\rho c^2$, wo $0 < \gamma < 2$. Finden Sie Entwicklungsgleichungen für $\rho(R(t))$, $R(t)$ und damit $\rho(t)$ für Universen mit Materie, die dieser Zustandsgleichung genügt. Nehmen Sie wieder ein flaches Universum mit $k = 0$ an.
- iv) Was ist die Entwicklungsgleichung für $p = -\rho c^2$? (*Anmerkung:* Letztere Zustandsgleichung ist die Zustandsgleichung für Vakuum.)