



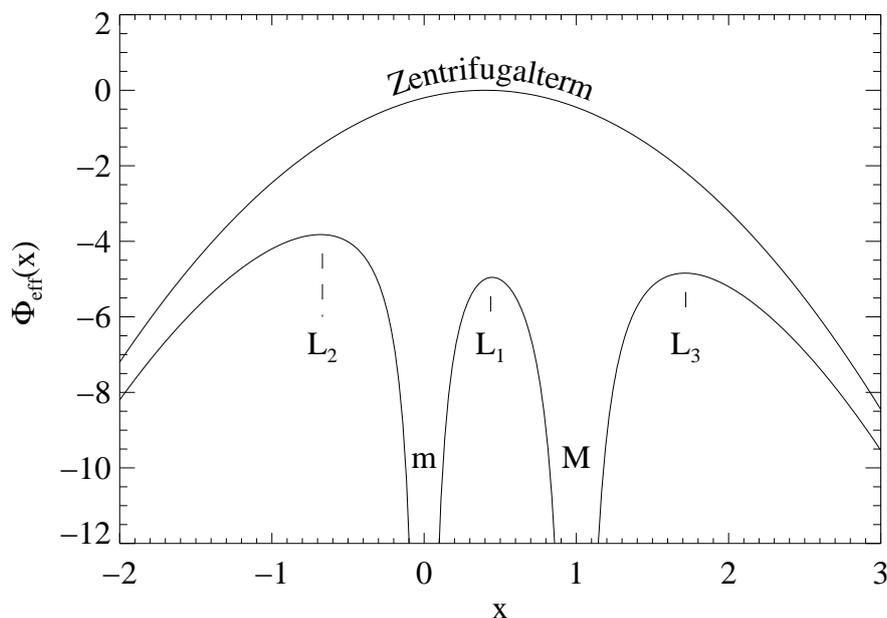
## Frage 1: Satellitengalaxien und die Milchstrasse

In dieser Übung betrachten wir die Bewegung von Sternen (=Testmassen) einer Satellitengalaxie mit der Masse  $m$ , die sich um ihre Zentralgalaxie bewegen, die die Masse  $M$  habe. Dieses Problem wurde für den Fall der Bewegung von Körpern im Erde-Mond-System zum ersten Mal von Lagrange Ende des 19. Jahrhunderts betrachtet und wird als "eingeschränktes Dreikörperproblem" bezeichnet. Eine allgemeine analytische Lösung des Problems kann nicht angegeben werden, näherungsweise sind für den uns interessierenden Fall  $m \ll M$  qualitative Lösungen möglich.

Die Lösung ist dabei am einfachsten, wenn sie in einem mit  $m$  und  $M$  mitrotierenden Koordinatensystem betrachtet wird. Allerdings müssen dabei zusätzlich zur Gravitation von  $m$  und  $M$  auch noch Scheinkräfte berücksichtigt werden. Es ist möglich, Gravitation und Scheinkräfte durch ein sogenanntes effektives Potential (oder "Roche-Potential") zu beschreiben, das die Form

$$\Phi_{\text{eff}}(x) = -\frac{GM}{|D-x|} - \frac{Gm}{|x|} - \frac{\Omega^2}{2} \left( x - \frac{DM}{M+m} \right)^2 \quad (1.1)$$

hat. Hierbei ist  $D$  die Entfernung zwischen  $m$  und  $M$ ,  $x$  der von  $m$  aus gemessene Abstand der Testmasse und  $\Omega$  die Kreisfrequenz. Die nachstehende Abbildung visualisiert dieses Potential sowie den Beitrag, den das Zentrifugalpotential liefert, für den Fall  $D = 1$ ,  $M = 1.5$ ,  $m = 1$  und  $G = 1$ :



Das effektive Potential hat drei Maxima, die sogenannten *Lagrange-Punkte*, die der Größe nach sortiert werden. Das tiefste Extremum,  $L_1$ , liegt zwischen den Galaxien,  $L_2$  liegt hinter der Satellitengalaxie,  $L_3$  hinter der Hauptgalaxie.

Um festzustellen, ob eine Testmasse (z.B. ein Stern) an  $m$  oder  $M$  gebunden ist, muss seine sogenannte Jacobi-Konstante,  $E_J$ , mit  $\Phi_{\text{eff}}$  verglichen werden, wobei

$$E_J = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (1.2)$$

wo  $\vec{L}$  der Bahndrehimpuls der Testmasse ist<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Das Roche-Potential ist z.B. auch wichtig, wenn man die Akkretion von Material von einem normalen Stern auf

Eine Herleitung der obigen Gleichungen ist länglich aber nicht schwierig. Sie kann z.B. mit dem Lagrange-Formalismus ohne viel Überlegungen durchgeführt werden. Eine Herleitung in Newton'scher Mechanik ist natürlich ebenfalls möglich (siehe z.B. Kapitel 4.1.4 von Sparke und Gallagher).

a) Zeigen Sie, dass die Kreisfrequenz der Bewegung von  $m$  um  $M$  gegeben ist durch

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{D^3}} \quad (1.3)$$

b) Die Lagrange-Punkte sind Extrema von  $\Phi_{\text{eff}}$ , sie können daher prinzipiell dadurch gefunden werden, dass  $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x = 0$  gesetzt werden kann. Dies ist im allgemeinen Fall nicht möglich, wohl aber näherungsweise für den Fall  $m \ll M$ .

1. Berechnen Sie  $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x$ . Dabei ist für uns der Fall  $m \ll M$  interessant, d.h.  $L_1$  und  $L_2$  sind nahe an  $m$ , so dass Sie annehmen können, dass wir nur kleine Werte von  $|x|$  betrachten werden. Damit ist  $D - x > 0$ .

2. Da  $m \ll M$ , ist  $x$  klein. Setzen Sie  $\Omega$  in  $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x$  ein und finden Sie eine Näherung für  $(D-x)^{-2}$  um  $x = 0$  mithilfe einer Taylor Entwicklung. Zeigen Sie, dass dann näherungsweise

$$\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial x} \sim -\frac{GM}{D^2} - 2\frac{GM}{D^3}x \pm \frac{Gm}{x^2} - \frac{G(M+m)}{D^3} \left( x - \frac{DM}{M+m} \right) \quad (0)$$

3. Zeigen Sie, dass die Lagrangepunkte damit bei

$$x = \pm r_J \quad \text{mit} \quad r_J = D \left( \frac{m}{3M+m} \right)^{1/3} \quad (0)$$

liegen, wo  $r_J$  der Jacobi-Radius genannt wird (häufig auch der Hill-Radius [in der Planetologie] oder das Roche-Limit).

c) Die Sonne hat eine Masse von  $2 \times 10^{33}$  g, die Erde eine Masse von  $6 \times 10^{27}$  g und der Mond eine Masse von  $7.3 \times 10^{25}$  g. Der Abstand zwischen Erde und Mond beträgt 380000 km, der zur Sonne beträgt 150 Millionen km. Bestimmen Sie die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond und die Anziehungskraft zwischen Sonne und Mond. Warum bleibt der Mond dennoch an die Erde gebunden?

(Konstanten:  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ )

d) Die Sagittarius Zwerggalaxie hat einen Abstand von 15 kpc von der Milchstrasse. Bestimmen Sie die Masse der Milchstrasse innerhalb von 10 kpc von ihrem Zentrum unter der Annahme, dass die Milchstrasse bis zu diesem Abstand eine konstante Rotationsgeschwindigkeit von  $200 \text{ km s}^{-1}$  hat und sphärische Symmetrie vorliegt. Zeigen Sie, dass die Sagittarius Zwerggalaxie eine Masse von  $10^{10} M_\odot$  benötigen würde, damit Sterne, die 5 kpc von ihrem Zentrum entfernt sind, noch an die Zwerggalaxie gebunden sind (die tatsächliche Masse der Sagittarius Zwerggalaxie ist deutlich geringer, d.h. sie wird von der Milchstrasse zerrissen).

(Zahlenwerte:  $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm}$ ).

e) Diskutieren Sie mit Ihren Kollegen, welche wesentlichen Näherungen in die obigen Rechnungen eingegangen (die erstaunlicherweise das Hauptergebnis nicht stark beeinflussen).

---

einen anderen Stern oder ein kompaktes Objekt betrachtet. Ist der Stern so groß, dass er an  $L_1$  heranreicht, dann kann Material über  $L_1$  auf den Begleiter überströmen.

## Frage 2: Galaxien-Klassifikation nach Hubble

In der Vorlesung wurde ein einfaches Schema zur Galaxienklassifikation vorgestellt, das auf Edwin Hubble aus dem Jahre 1936 zurückgeht. Hubble teilte die Galaxien in drei Grundtypen ein: elliptische, linsenförmige und Spiralgalaxien und führte als zusätzliche Klasse die der irregulären Galaxien ein, für alle Objekte, die nicht klar in eine der anderen Klassen fielen.

Die elliptischen Galaxien werden geordnet entsprechend ihres (projektionsabhängigen) Verhältnisses von grosser Halbachse  $a$  zu kleiner Halbachse  $b$  (welches stets kleiner als 3 ist): Typ  $E_x$ , wobei  $x = 10(a - b)/a$ .

Spiralgalaxien werden von *frühen* zu *späten* Typen entlang der Sequenz  $S_a, S_b, S_c$  geordnet entsprechend spezieller Kriterien, die im weiteren Semester noch näher diskutiert werden. Hierbei handelt es sich **nicht** um eine Entwicklungssequenz. Rein morphologisch öffnen sich die Spiralarms mehr und mehr von frühen zu späten Typen hin, werden klarer aufgelöst und stärker im Vergleich zum Bulge. Es gibt eine parallele Sequenz  $S_{Ba}, S_{Bb}, S_{Bc}$  für Spiralgalaxien mit einem zentralen Balken. Die am schwächsten ausgeprägten Spiralstrukturen in ansonsten fast schon irregulär erscheinenden Galaxien sind die Magellanschen Typen  $S_m$  und  $S_{Bm}$ .

Betrachten und diskutieren Sie die im Anhang abgebildeten 14 Galaxien aus dem Sloan Digital Sky Survey<sup>2</sup>. Alle Bilder wurden in drei optischen Filtern (gri) aufgenommen. Achten Sie auf Farben, Durchmesser und Struktur der unterschiedlichen Galaxientypen.

- Skizzieren Sie grafisch das Schema der Hubble Klassifikation.
- Messen Sie das Achsenverhältnis der elliptischen Galaxien NGC 4374, NGC 5322 und NGC 4621 und bestimmen Sie den Hubble-Typ.
- Identifizieren Sie Galaxien, die einen zentralen Balken aufweisen.
- Versuchen Sie, die Galaxien primär anhand ihrer Struktur nach dem Schema der Hubble Sequenz zu klassifizieren.
- Vergleichen Sie die Farben der Scheiben, Spiralarms, und Bulges. Welche systematischen Unterschiede sind zu erkennen? Was kann man daraus bezüglich der Sternentstehungsrate in den verschiedenen Klassen ableiten?

---

<sup>2</sup>Images: David W. Hogg, Michael R. Blanton, and the Sloan Digital Sky Survey Collaboration

