



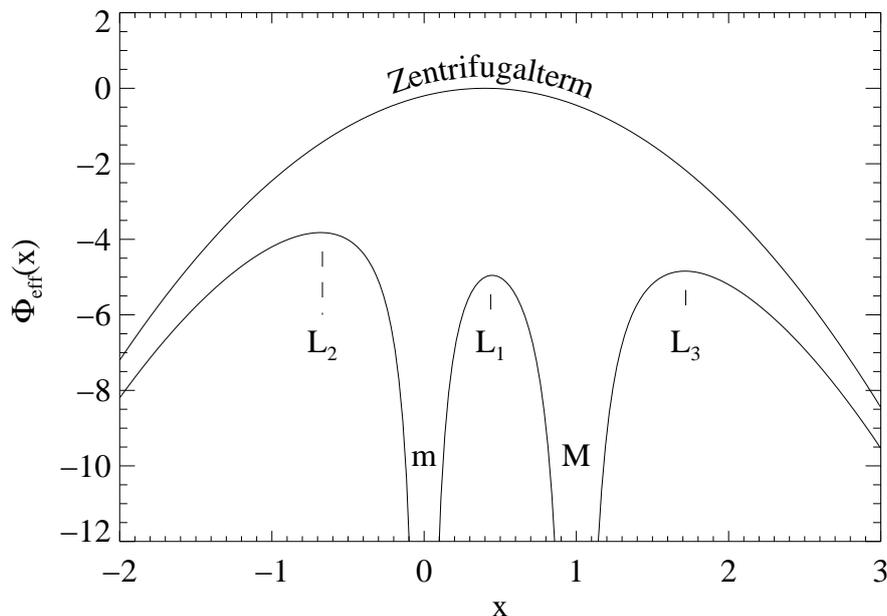
Frage 1: Satellitengalaxien und die Milchstrasse

In dieser Übung betrachten wir die Bewegung von Sternen (=Testmassen) einer Satellitengalaxie mit der Masse m , die sich um ihre Zentralgalaxie bewegen, die die Masse M habe. Dieses Problem wurde für den Fall der Bewegung von Körpern im Erde-Mond-System zum ersten Mal von Lagrange Ende des 19. Jahrhunderts betrachtet und wird als "eingeschränktes Dreikörperproblem" bezeichnet. Eine allgemeine analytische Lösung des Problems kann nicht angegeben werden, näherungsweise sind für den uns interessierenden Fall $m \ll M$ qualitative Lösungen möglich.

Die Lösung ist dabei am einfachsten, wenn sie in einem mit m und M mitrotierenden Koordinatensystem betrachtet wird. Allerdings müssen dabei zusätzlich zur Gravitation von m und M auch noch Scheinkräfte berücksichtigt werden. Es ist möglich, Gravitation und Scheinkräfte durch ein sogenanntes effektives Potential (oder "Roche-Potential") zu beschreiben, das die Form

$$\Phi_{\text{eff}}(x) = -\frac{GM}{|D-x|} - \frac{Gm}{|x|} - \frac{\Omega^2}{2} \left(x - \frac{DM}{M+m} \right)^2 \quad (1.1)$$

hat. Hierbei ist D die Entfernung zwischen m und M , x der von m aus gemessene Abstand der Testmasse und Ω die Kreisfrequenz. Die nachstehende Abbildung visualisiert dieses Potential sowie den Beitrag, den das Zentrifugalpotential liefert, für den Fall $D = 1$, $M = 1.5$, $m = 1$ und $G = 1$:



Das effektive Potential hat drei Maxima, die sogenannten *Lagrange-Punkte*, die der Größe nach sortiert werden. Das tiefste Extremum, L_1 , liegt zwischen den Galaxien, L_2 liegt hinter der Satellitengalaxie, L_3 hinter der Hauptgalaxie.

Um festzustellen, ob eine Testmasse (z.B. ein Stern) an m oder M gebunden ist, muss seine sogenannte Jacobi-Konstante, E_J , mit Φ_{eff} verglichen werden, wobei

$$E_J = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (1.2)$$

wo \vec{L} der Bahndrehimpuls der Testmasse ist¹.

¹Das Roche-Potential ist z.B. auch wichtig, wenn man die Akkretion von Material von einem normalen Stern auf

Eine Herleitung der obigen Gleichungen ist länglich aber nicht schwierig. Sie kann z.B. mit dem Lagrange-Formalismus ohne viel Überlegungen durchgeführt werden. Eine Herleitung in Newton'scher Mechanik ist natürlich ebenfalls möglich (siehe z.B. Kapitel 4.1.4 von Sparke und Gallagher).

a) Zeigen Sie, dass die Kreisfrequenz der Bewegung von m um M gegeben ist durch

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{D^3}} \quad (s1.3)$$

Lösung: Der Schwerpunkt des Systems m, M ist bei

$$x = \frac{DM}{M+m} \quad (s1.1)$$

Gleichsetzen der Zentrifugalkraft und der Gravitationskraft ergibt

$$mx\Omega^2 = G\frac{Mm}{D^2} \quad (s1.2)$$

und damit

$$\Omega^2 = G\frac{M}{xD^2} = \frac{G(M+m)}{D^3} \quad (s1.3)$$

b) Die Lagrange-Punkte sind Extrema von Φ_{eff} , sie können daher prinzipiell dadurch gefunden werden, dass $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x = 0$ gesetzt werden kann. Dies ist im allgemeinen Fall nicht möglich, wohl aber näherungsweise für den Fall $m \ll M$.

1. Berechnen Sie $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x$. Dabei ist für uns der Fall $m \ll M$ interessant, d.h. L_1 und L_2 sind nahe an m , so dass Sie annehmen können, dass wir nur kleine Werte von $|x|$ betrachten werden. Damit ist $D - x > 0$.

Lösung: Durch einfaches Differenzieren ergibt sich

$$\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial x} = -\frac{GM}{(D-x)^2} \pm \frac{Gm}{x^2} - \Omega^2 \left(x - \frac{DM}{M+m} \right) \quad (s1.4)$$

wobei das \pm -Zeichen dadurch herrührt, dass x positiv und negativ sein kann.

2. Da $m \ll M$, ist x klein. Setzen Sie Ω in $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x$ ein und finden Sie eine Näherung für $(D-x)^{-2}$ um $x = 0$ mithilfe einer Taylor Entwicklung. Zeigen Sie, dass dann näherungsweise

$$\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial x} \sim -\frac{GM}{D^2} - 2\frac{GM}{D^3}x \pm \frac{Gm}{x^2} - \frac{G(M+m)}{D^3} \left(x - \frac{DM}{M+m} \right) \quad (1.4)$$

Lösung: Taylor-Entwicklung von $(D-x)^{-2}$ um $x = 0$ ergibt:

$$\frac{1}{(D-x)^2} \sim \frac{1}{D^2} + \frac{2}{D^3}x + \dots \quad (s1.5)$$

und daraus ergibt sich einfach die gesuchte Formel.

einen anderen Stern oder ein kompaktes Objekt betrachtet. Ist der Stern so groß, dass er an L_1 heranreicht, dann kann Material über L_1 auf den Begleiter überströmen.

3. Zeigen Sie, dass die Lagrangepunkte damit bei

$$x = \pm r_J \quad \text{mit} \quad r_J = D \left(\frac{m}{3M + m} \right)^{1/3} \quad (1.5)$$

liegen, wo r_J der Jacobi-Radius genannt wird (häufig auch der Hill-Radius [in der Planetologie] oder das Roche-Limit).

Lösung: Dies ergibt sich durch Gleichsetzen $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x = 0$ und Auflösen nach x .

- c) Die Sonne hat eine Masse von 2×10^{33} g, die Erde eine Masse von 6×10^{27} g und der Mond eine Masse von 7.3×10^{25} g. Der Abstand zwischen Erde und Mond beträgt 380000 km, der zur Sonne beträgt 150 Millionen km. Bestimmen Sie die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond und die Anziehungskraft zwischen Sonne und Mond. Warum bleibt der Mond dennoch an die Erde gebunden?

(Konstanten: $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$)

Lösung: Es ergibt sich

$$F_{\text{Erde-Mond}} = 2 \times 10^{25} \text{ dyn} \quad (\text{s1.6})$$

$$F_{\text{Sonne-Mond}} = 4 \times 10^{25} \text{ dyn} \quad (\text{s1.7})$$

d.h., die Kraft, die die Sonne auf den Mond ausübt, ist *zwei Mal größer* als die Gravitationskraft, die die Erde auf den Mond ausübt.

Der Grund, warum der Mond dennoch an die Erde gebunden bleibt, ist, dass der Jacobi-Radius des Erde-Sonne-Systems einen Wert von $r_J = 1.5 \times 10^6$ km hat, d.h. $4 \times$ größer ist als der Abstand Erde-Mond.

- d) Die Sagittarius Zwerggalaxie hat einen Abstand von 15 kpc von der Milchstrasse. Bestimmen Sie die Masse der Milchstrasse innerhalb von 10 kpc von ihrem Zentrum unter der Annahme, dass die Milchstrasse bis zu diesem Abstand eine konstante Rotationsgeschwindigkeit von 200 km s^{-1} hat und sphärische Symmetrie vorliegt. Zeigen Sie, dass die Sagittarius Zwerggalaxie eine Masse von $10^{10} M_\odot$ benötigen würde, damit Sterne, die 5 kpc von ihrem Zentrum entfernt sind, noch an die Zwerggalaxie gebunden sind (die tatsächliche Masse der Sagittarius Zwerggalaxie ist deutlich geringer, d.h. sie wird von der Milchstrasse zerrissen).

(Zahlenwerte: $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm}$).

Lösung: Die Masse der Milchstrasse innerhalb von 15 kpc, $M_<$, ergibt sich unter der Annahme sphärischer Symmetrie und kreisförmiger Bahnen einfach aus

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_< m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad M_< = \frac{rv^2}{G} = 2.77 \times 10^{44} \text{ g} = 10^{11} M_\odot \quad (\text{s1.8})$$

Die Abschätzung für die notwendige Masse ergibt sich mit dieser Masse einfach aus der Gleichung für den Jacobi-Radius.

- e) Diskutieren Sie mit Ihren Kollegen, welche wesentlichen Näherungen in die obigen Rechnungen eingegangen (die erstaunlicherweise das Hauptergebnis nicht stark beeinflussen).

Lösung: Mögliche Punkte sind:

- Sphärische Symmetrie – allerdings sind Dark Matter Halos sphärisch symmetrisch und dominieren die Massenverteilung.
 - Kreisbahn – typischerweise würden wir elliptische Bahnen erwarten, in diesem Fall kann allerdings der Jacobi-Radius jeweils von der instantanen Bahngeschwindigkeit und Abstand her abgeleitet werden.
-

Frage 2: Galaxien-Klassifikation nach Hubble

In der Vorlesung wurde ein einfaches Schema zur Galaxienklassifikation vorgestellt, das auf Edwin Hubble aus dem Jahre 1936 zurückgeht. Hubble teilte die Galaxien in drei Grundtypen ein: elliptische, linsenförmige und Spiralgalaxien und führte als zusätzliche Klasse die der irregulären Galaxien ein, für alle Objekte, die nicht klar in eine der anderen Klassen fielen.

Die elliptischen Galaxien werden geordnet entsprechend ihres (projektionsabhängigen) Verhältnisses von grosser Halbachse a zu kleiner Halbachse b (welches stets kleiner als 3 ist): Typ E_x , wobei $x = 10(a - b)/a$.

Spiralgalaxien werden von *frühen* zu *späten* Typen entlang der Sequenz S_a, S_b, S_c geordnet entsprechend spezieller Kriterien, die im weiteren Semester noch näher diskutiert werden. Rein morphologisch öffnen sich die Spiralarme mehr und mehr von frühen zu späten Typen hin, werden klarer aufgelöst und stärker im Vergleich zum Bulge. Es gibt eine parallele Sequenz S_{Ba}, S_{Bb}, S_{Bc} für Spiralgalaxien mit einem zentralen Balken. Die am schwächsten ausgeprägten Spiralstrukturen in ansonsten fast schon irregulär erscheinenden Galaxien sind die Magellanschen Typen S_m und S_{Bm} .

Betrachten und diskutieren Sie die im Anhang abgebildeten 14 Galaxien aus dem Sloan Digital Sky Survey². Alle Bilder wurden in drei optischen Filtern (gri) aufgenommen. Achten Sie auf Farben, Durchmesser und Struktur der unterschiedlichen Galaxientypen.

a) Skizzieren Sie grafisch das Schema der Hubble Klassifikation.

Lösung: siehe VL Skript.

b) Messen Sie das Achsenverhältnis der elliptischen Galaxien NGC 4374, NGC 5322 und NGC 4621 und bestimmen Sie den Hubble-Typ.

Lösung: NGC 4374: Achsenverhältnis $\sim 1 : 1 \Rightarrow$ Typ: E0

NGC 5322: Achsenverhältnis $\sim 3 : 2 \Rightarrow$ Typ: E3-4

NGC 4621: Achsenverhältnis $\sim 2 : 1 \Rightarrow$ Typ: E5

c) Identifizieren Sie Galaxien, die einen zentralen Balken aufweisen.

Lösung: NGC 4321: Spiralarme setzen sich nicht bis zum Kern fort.

NGC 4461: Schwer zu sehen.

NGC 4477: Klar.

NGC 4548: Klar.

NGC 936: Klar.

d) Versuchen Sie, die Galaxien primär anhand ihrer Struktur nach dem Schema der Hubble Sequenz zu klassifizieren.

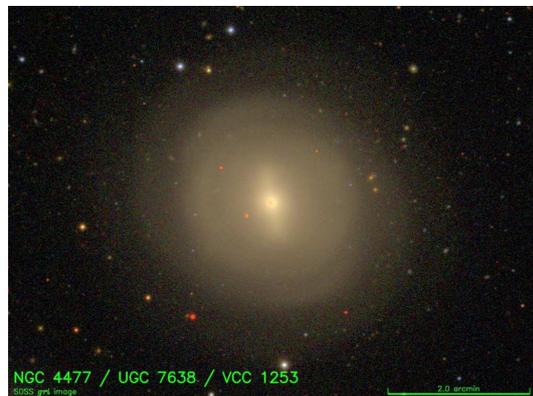
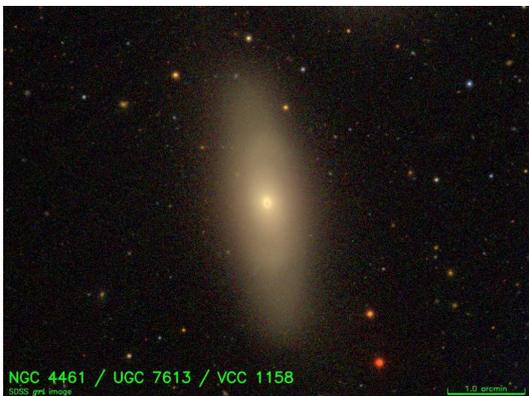
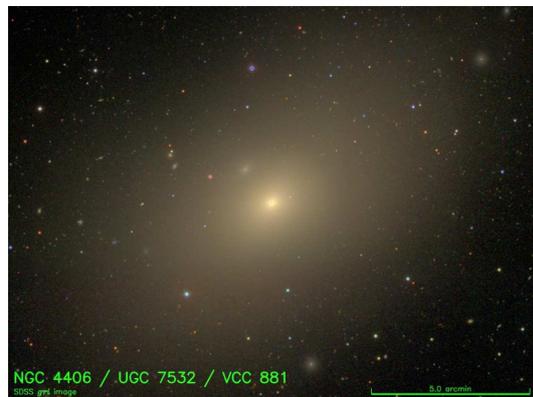
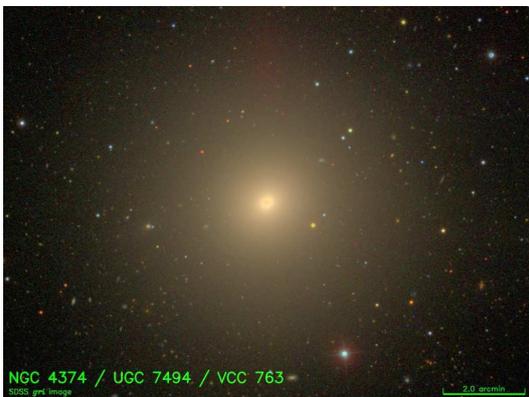
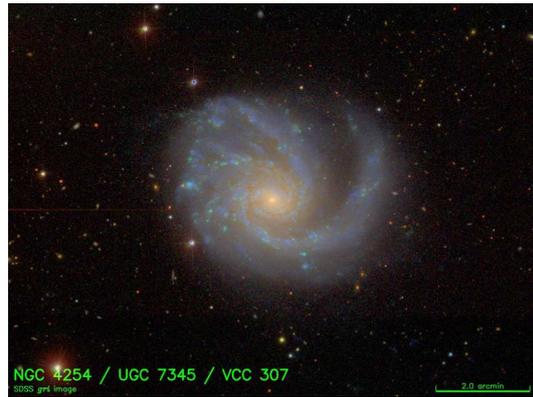
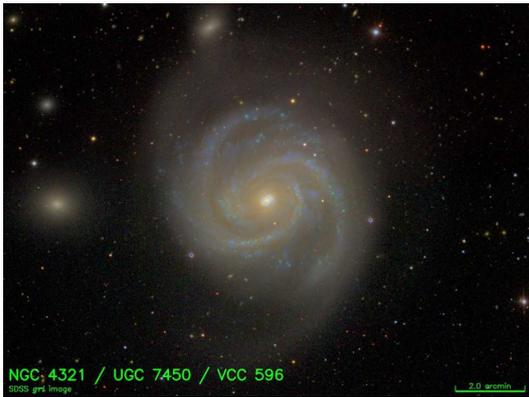
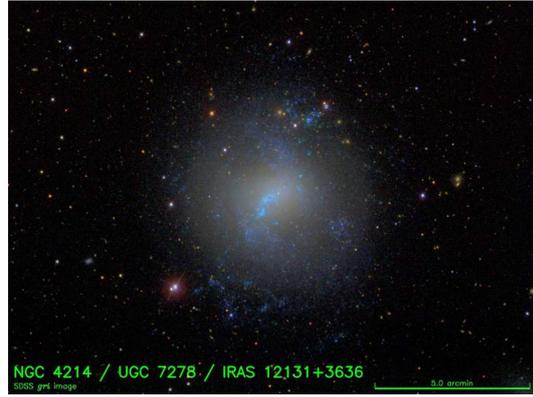
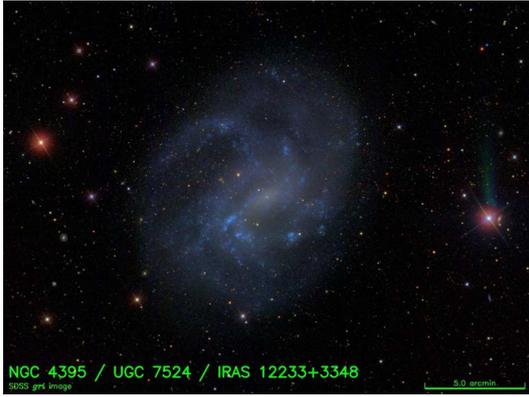
Lösung: Die morphologische Klassifikation ist nicht in allen Fällen eindeutig!

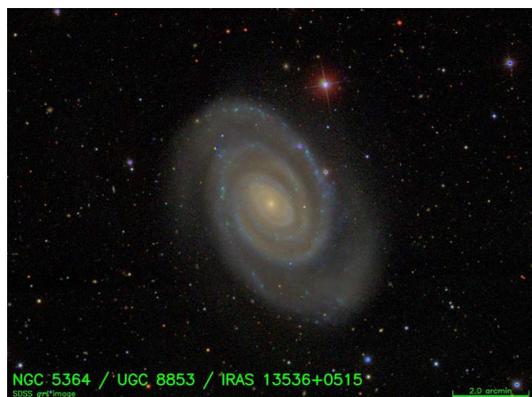
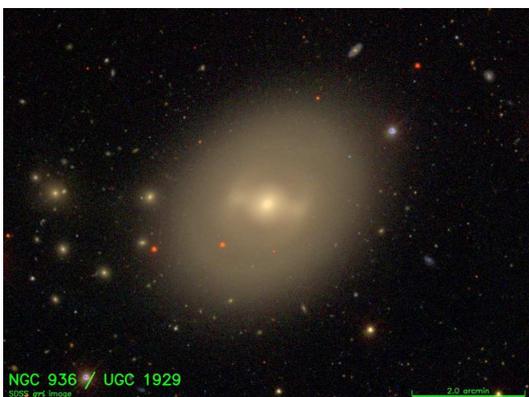
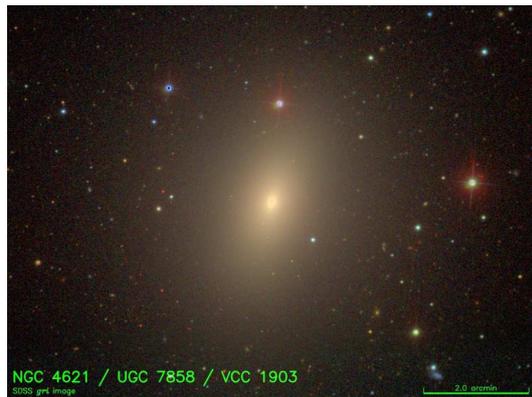
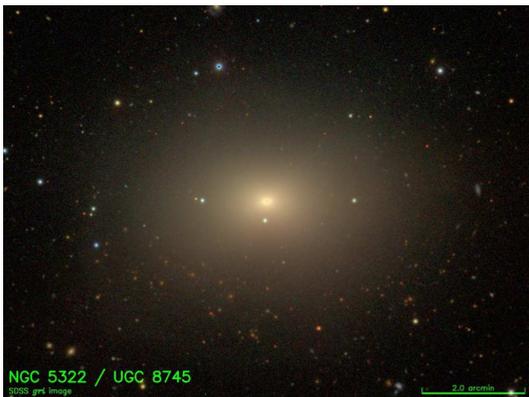
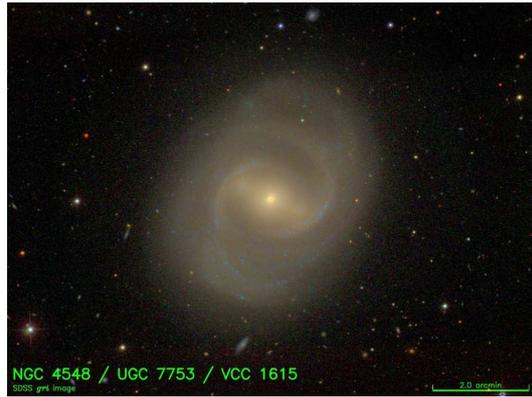
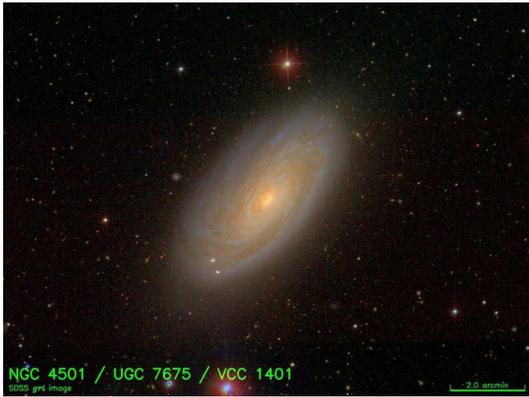
Klassifikationen laut NED: NGC 4395: S_m , NGC 4214: Irr, NGC 4321: S_{bc} , NGC 4254: S_c , NGC 4374: E1, NGC 4406: S_0 , NGC 4461: S_{B0} , NGC 4477: S_{B0} , NGC 4501: S_b , NGC 4548: S_{Bb} , NGC 5322: E3-4, NGC 4621: E5, NGC 936: S_{B0} , NGC 5364: S_c

²Images: David W. Hogg, Michael R. Blanton, and the Sloan Digital Sky Survey Collaboration

- e) Vergleichen Sie die Farben der Scheiben, Spiralarme, und Bulges. Welche systematischen Unterschiede sind zu erkennen? Was kann man daraus bezüglich der Sternentstehungsrate in den verschiedenen Klassen ableiten?

Lösung: Je ausgeprägter die Spiralarme sind, desto blauer erscheinen sie. Auch die irregulären Galaxien sind sehr blau. In *späten Galaxien-Typen* findet viel Sternentstehung innerhalb der Spiralarme statt (junge Sterne \Rightarrow blaue Farbe). Wenig bis keine Sternentstehung in den Bulges der Spiralgalaxien und in den elliptischen Galaxien.





Lösung: