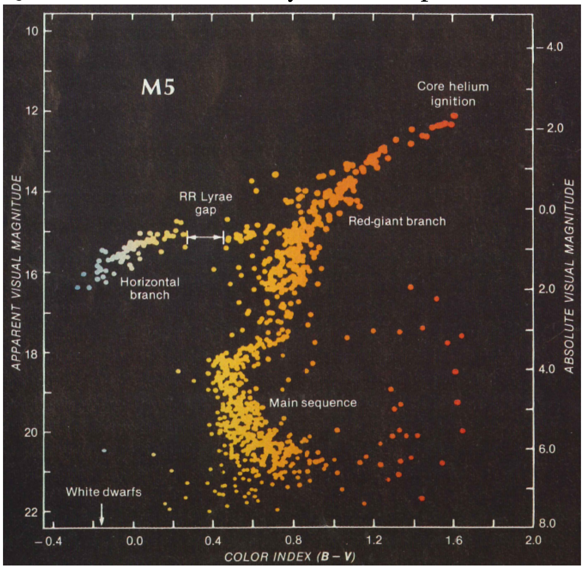
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Galaxien und Kosmologie

Wintersemester 2011/2012
Übungsaufgaben 02
J. Wilms
10. November 2011

Frage 1: *Die Entfernung zum galaktischen Zentrum*

Quelle: A. Hirshfield, Sky & Telescope, Dec. 1984, p. 498



Kugelsternhaufen haben eine Metallizität, die deutlich geringer ist, als die der Sonne. Das führt dazu, dass sich manche Sterne in Kugelsternhaufen im Laufe ihrer Entwicklung auch im sogenannten Horizontalast im Hertzsprung-Russell-Diagramm aufhalten werden und dabei den Instabilitätsstreifen durchlaufen. Diese Sterne werden RR Lyrae-Sterne genannt. Der Horizontalast ist daher durch eine kleine Lücke von den Roten Riesen getrennt und in HRDs oder Farben-Helligkeits-Diagrammen einfach erkennbar (siehe Abbildung).

a) Von Ihren Betreuern haben Sie zwei FHDs von Kugelsternhaufen erhalten. Identifizieren Sie den Horizontalast und messen Sie die scheinbare Helligkeit des blauen Endes der RR Lyr-Lücke. Bestimmen Sie daraus das Entfernungsmodul und die Entfernung (in kpc) dieser Kugelsternhaufen. Beachten Sie dabei die von Staub in der Milchstrasse hervorgerufene Extinktion in Richtung dieser Objekte!
Tip: Sie sollten die Formel für das Entfernungsmodul eigentlich wissen. Wenn nicht, dann sollten Sie sich diese aus der Definition der Magnitude

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \tag{1.1}$$

herleiten können.

b) Für Ihre Kugelsternhaufen wird auf Ihrem Handout auch die galaktische Länge, ℓ, und die Breite, b, angegeben. Berechnen Sie mit der oben ermittelten Entfernung die Koordinaten des Kugelsternhaufens in einem auf das Sonnensystem zentrierten kartesischen Koordinatensystem. Dabei weise die x-Achse auf das galaktische Zentrum ($\ell = 0°$, $b = 0°$), die y-Achse in eine Richtung 90° östlich davon ($\ell = 90°$, $b = 0°$) und die z-Achse weist zum galaktischen Nordpol ($b = 90°$).

c) Ihre Betreuer werden jetzt die einzelnen Kugelsternhaufen aufrufen, x, y, z in eine Tabelle eintragen und danach die Verteilung der Kugelsternhaufen im Raum plotten (Schnitte durch die x-z-Ebene und die x-y-Ebene). Diskutieren Sie mit Ihren Kommilitonen diese Verteilung:
   - Gehören Kugelsternhaufen zur Scheiben- oder zur Halopopulation?
   - Bestimmen Sie gemeinsam aus Ihren obigen Messungen die Entfernung zum galaktischen Zentrum.

Frage 2: *Galaxienhelligkeiten*

Die Anzahldichte von Sternen in einer Galaxie ist gegeben durch

$$n(R,z) = n_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{h_z}\right) \tag{2.1}$$

Hier ist R der Abstand vom galaktischen Zentrum und z die Höhe über der Scheibe.

a) Bestimmen Sie aus Gl. 2.1 die Oberflächendichte Σ der Sterne als Funktion von R, d.h. die Zahl der Sterne pro Flächenelement der Scheibe. Warum gilt damit für den radialen Verlauf der Flächenhelligkeit

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \tag{2.2}$$

b) Bestimmen Sie die Gesamtleuchtkraft einer Spiralgalaxie, deren Flächenhelligkeit durch Gl. (2.2) gegeben ist.

c) Für die Milchstrasse ist $L \sim 1.5 \times 10^{10}\, L_\odot$ und $h_R = 3\,\mathrm{kpc}$. Zeigen Sie, dass am solaren Radius ($r = 8\,\mathrm{kpc}$) die Flächenhelligkeit $18\, L_\odot\, \mathrm{pc}^{-2}$ beträgt.

d) Erklären Sie, warum die Flächenhelligkeit einer Galaxie ($\mathrm{mag\, arcsec^{-2}}$) *nicht* von der Entfernung der Galaxie abhängt.

Frage 3: *Galaxien als stossfreie Systeme*

Dies ist eine freiwillige Denkaufgabe, die Sie zu Hause bearbeiten können.
In der Vorlesung wurde die Bewegung von Gas und Sternen in der Galaxie als Bewegung in einem "glatten" Potential beschrieben. Dieser Ansatz ist nur gerechtfertigt, wenn die Wechselwirkung zwischen einzelnen Sternen vernachlässigbar ist. In dieser Aufgabe werden Sie zeigen, warum dies der Fall ist.

a) **Starke Wechselwirkung:** Der offensichtlichste Fall der Wechselwirkung zwischen zwei Sternen ist der, wenn zwei Sterne so nahe aneinander vorbeifliegen, dass ihre Bahn signifikant beeinflusst wird. Das ist sicherlich dann der Fall, wenn die Änderung der potentiellen Energie zu dem Zeitpunkt, an dem die Sterne zueinander am nächsten sind, so gross ist wie die anfängliche kinetische Energie. Für den einfachsten Fall zweier Sterne gleicher Massen ist dies der Fall wenn

$$\frac{Gm^2}{r} \gtrsim \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{das heisst, für} \qquad r \lesssim r_\mathrm{s} = \frac{2Gm}{v^2} \tag{3.1}$$

wobei hier v die Relativgeschwindigkeit der Sterne ist.

   i. Zeigen Sie, dass die mittlere Zeit zwischen zwei derartigen Zusammenstößen gegeben ist durch

   $$t_\mathrm{s} = \frac{v^3}{4\pi G^2 m^2 n} \tag{3.2}$$

   wo n die mittlere Anzahldichte der Sterne im betrachteten Volumen ist.

   ii. Berechnen Sie t_s für die Sonnenumgebung, d.h. für $v = 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (die typische Geschwindigkeitsdispersion in unserer Umgebung), $m = 1\,M_\odot$ und $n = 0.1\,\mathrm{pc^{-3}}$. Vergleichen Sie diese Zahl mit dem Alter des Universums.

   iii. Der Kugelsternhaufen 47 Tuc hat in seinem Zentrum eine Sterndichte von $50000\,\mathrm{pc^{-3}}$ und eine Geschwindigkeitsdispersion von $10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Was ist die typische Zeitskala zwischen starken Zusammenstößen in diesem System?

b) **schwache Wechselwirkungen** Für die Galaxie sind starke Zusammenstöße nach den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe nicht relevant. Sterne erleben jedoch auch viele "schwache Wechselwirkungen" mit weiter entfernten anderen Sternen. Auch diese Wechselwirkungen könnten prinzipiell die Bahn eines Sterns so stark ändern, dass der Potentialansatz nicht mehr gilt. Den Einfluss dieser Wechselwirkungen betrachten wir in dieser Teilaufgabe.
Wir betrachten den Vorbeiflug eines Sterns der Masse M mit Geschwindigkeit v an einem Stern der Masse m. Der geringste Abstand der Sterne sei durch den "impact parameter" b gegeben. Um die Geschwindigkeitsänderung genau auszurechnen, müssten wir eigentlich das Zweikörperproblem der Wechselwirkung zweier Sterne lösen. Das ist zwar möglich (es ergeben sich Hyperbelbahnen), ist aber für eine Abschätzung unnötig aufwendig. Wir gehen daher davon aus, dass die Wechselwirkung so schwach ist, dass sie die Bahn von M nicht signifikant stört, so dass sich M effektiv geradlinig bewegt (wir rechnen also in Störungstheorie erster Ordnung).

Anmerkung: Ein so gut wie identischer Ansatz wird übrigens auch bei der Berechnung des Spektrums der Bremsstrahlung aus einem ionisierten Plasma benutzt (siehe `http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/radproc/radprocchap5toc.html`).

   i. Zeigen Sie, dass die aufgrund des Vorbeiflugs verursachte Geschwindigkeitsänderung von M rechtwinklig zu seiner Ausbreitungsrichtung

   $$\Delta v_\perp = \frac{2GM}{bv} \tag{3.3}$$

   beträgt.

   ii. Zeigen Sie, dass der Ablenkwinkel von M damit

   $$\alpha = \frac{2GM}{bv^2} \tag{3.4}$$

beträgt.

iii. Wir nehmen jetzt die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne als zufällig im Raum verteilt an. Das bedeutet, dass der Stern in alle Richtungen gestört wird. Zur Bestimmung der gesamt übertragenen Geschwindigkeit, $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle$, müssen wir daher die einzelnen $\Delta v_\perp$ quadratisch addieren. Zeigen Sie durch Integration zwischen einem minimalen und einem maximalen Impakt-Parameter, dass

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle \sim \frac{8\pi G^2 m^2 n t}{v} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \tag{3.5}$$

iv. Die sogenannte *Relaxationszeit* ist die Zeit, bei der $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = v^2$. Zeigen Sie, dass diese gegeben ist durch

$$t_{\mathrm{relax}} = \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln\Lambda} = \frac{t_{\mathrm{s}}}{2\ln\Lambda} \tag{3.6}$$

wo $\ln\Lambda = \ln(b_{\max}/b_{\min})$.

Anmerkung: $\ln\Lambda$ heisst in der Plasmaphysik der “Coulomb Logarithmus”.

v. Nehmen Sie an, dass $b_{\min} = r_{\mathrm{s}}$ aus Teilaufgabe a) und $300\,\mathrm{pc} \lesssim b_{\max} \lesssim 30\,\mathrm{kpc}$. Zeigen Sie durch Berechnung der Relaxationszeitskala für die Sonnenumgebung und für 47 Tuc, dass für die Sonnenumgebung auch schwache Wechselwirkungen keine Rolle spielen, so dass in der Galaxie die Bahnen durch das mittlere Galaxienpotential gegeben sind, während dieser Effekt in Kugelsternhaufen auch berücksichtigt werden muss.