Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Galaxien und Kosmologie
Wintersemester 2011/2012
Übungsaufgaben 01 – Musterlösung
J. Wilms
31. Oktober 2011

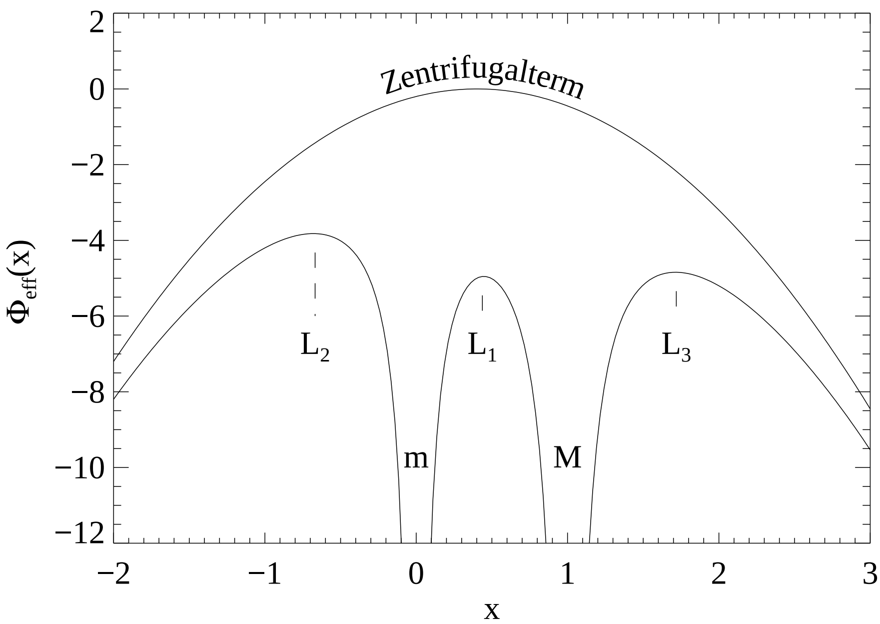
Frage 1: *Satellitengalaxien und die Milchstrasse*

In dieser Übung betrachten wir die Bewegung von Sternen (=Testmassen) in einer Satellitengalaxie, die sich um eine grosse Galaxie bewegen. Die Satellitengalaxie habe die Masse m, die Zentralgalaxie die Masse M, wobei $m \ll M$. Dieses Problem wurde für den Fall der Bewegung von Körpern im Erde-Mond-System zum ersten Mal von Lagrange Ende des 19. Jahrhunderts betrachtet und wird als "eingeschränktes Dreikörperproblem" bezeichnet. Eine allgemeine analytische Lösung des Problems kann nicht angegeben werden, näherungsweise sind für den uns interessierenden Fall $m \ll M$ qualitative Lösungen möglich.

Die Lösung ist dabei am Einfachsten, wenn sie in einem mit m und M mitrotierenden Koordinatensystem betrachtet wird. Allerdings müssen dabei zusätzlich zur Gravitation von m und M auch noch Scheinkräfte berücksichtigt werden. Im vorliegenden Fall können diese durch ein sogenanntes effektives Potential (oder "Roche-Potential") zu beschreiben, das die Form

$$\Phi_{\text{eff}}(x) = -\frac{GM}{|D-x|} - \frac{Gm}{|x|} - \frac{\Omega^2}{2}\left(x - \frac{DM}{M+m}\right)^2 \tag{1.1}$$

hat. Hierbei ist D die Entfernung zwischen m und M, x der von m aus gemessene Abstand der Testmasse und Ω die Kreisfrequenz. Die nachstehende Abbildung visualisiert dieses Potential sowie den Beitrag, den das Zentrifugalpotential liefert, für den Fall $D = 1$, $M = 1.5$, $m = 1$ und $G = 1$:



Das effektive Potential hat drei Maxima, die sogenannten *Lagrange-Punkte*, die der Tiefe nach sortiert werden. Das tiefste Extremum, L_1, liegt zwischen den Galaxien, L_2 liegt hinter der Satellitengalaxie, L_3 hinter der Hauptgalaxie.

Um festzustellen, ob eine Testmasse (z.B. ein Stern) an m oder M gebunden ist, muss seine sogenannte Jacobi-Konstante, E_J, mit Φ_{eff} verglichen werden, wobei

$$E_J = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \tag{1.2}$$

wo $\vec{L}$ der Bahndrehimpuls der Testmasse ist[1].
Eine Herleitung der obigen Gleichungen ist länglich aber nicht schwierig. Sie kann z.B. mit dem Lagrange-Formalismus ohne viel Überlegungen durchgeführt werden. Eine Herleitung in Newton'scher Mechanik ist natürlich ebenfalls möglich (siehe z.B. Kapitel 4.1.4 von Sparke und Gallagher).

a) Zeigen Sie, dass die Kreisfrequenz der Bewegung von m um M gegeben ist durch

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{D^3}} \tag{1.3}$$

Lösung: Der Schwerpunkt des Systems m, M ist bei

$$x = \frac{DM}{M+m} \tag{s1.1}$$

Gleichsetzen der Zentrifugalkraft und der Gravitationskraft ergibt

$$mx\Omega^2 = G\frac{Mm}{D^2} \tag{s1.2}$$

und damit

$$\Omega^2 = G\frac{M}{xD^2} = \frac{G(M+m)}{D^3} \tag{s1.3}$$

b) Die Lagrange-Punkte sind Extrema von Φ_{eff}, sie können daher prinzipiell dadurch gefunden werden, dass $\partial\Phi_{\mathrm{eff}}/\partial x = 0$ gesetzt werden kann. Dies ist im allgemeinen Fall nicht möglich, wohl aber näherungsweise für den Fall $m \ll M$.

1. Berechnen Sie $\partial\Phi_{\mathrm{eff}}/\partial x$. Dabei ist für uns der Fall $m \ll M$ interessant, d.h. L_1 und L_2 sind nahe an m, so dass Sie annehmen können, dass wir nur kleine Werte von $|x|$ betrachten werden. Damit ist $D - x > 0$.

Lösung: Durch einfaches Differenzieren ergibt sich

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial x} = -\frac{GM}{(D-x)^2} \pm \frac{Gm}{x^2} - \Omega^2\left(x - \frac{DM}{M+m}\right) \tag{s1.4}$$

wobei das $\pm$-Zeichen dadurch herrührt, dass x positiv und negativ sein kann.

2. Da $m \ll M$, ist x klein. Setzen Sie Ω in $\partial\Phi_{\mathrm{eff}}/\partial x$ ein und führen Sie eine geeignete Taylor-Entwicklung durch. Zeigen Sie, dass näherungsweise

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial x} \sim -\frac{GM}{D^2} - 2\frac{GM}{D^3}x \pm \frac{Gm}{x^2} - \frac{G(M+m)}{D^3}\left(x - \frac{DM}{M+m}\right) \tag{1.4}$$

Lösung: Taylor-Entwicklung von $(D-x)^{-2}$ um $x = 0$ ergibt:

$$\frac{1}{(D-x)^2} \sim \frac{1}{D^2} + \frac{2}{D^3}x + \dots \tag{s1.5}$$

und daraus ergibt sich einfach die gesuchte Formel.

[1] Das Roche-Potential ist z.B. auch wichtig, wenn man die Akkretion von Material von einem normalen Stern auf einen anderen Stern oder ein kompaktes Objekt betrachtet. Ist der Stern so groß, dass er an L_1 heranreicht, dann kann Material über L_1 auf den Begleiter überströmen.

3. Zeigen Sie, dass die Lagrangepunkte damit bei

$$x = \pm r_J \quad \text{mit} \quad r_J = D\left(\frac{m}{3M+m}\right)^{1/3} \tag{1.5}$$

liegen, wo r_J der Jacobi-Radius genannt wird (häufig auch der Hill-Radius [in der Planetologie] oder das Roche-Limit).

Lösung: Dies ergibt sich durch Gleichsetzen $\partial\Phi_{\text{eff}}/\partial x = 0$ und Auflösen nach x.

c) Die Sonne hat eine Masse von 2×10^{33} g, die Erde eine Masse von 6×10^{27} g und der Mond eine Masse von 7.3×10^{25} g. Der Abstand zwischen Erde und Mond beträgt 380000 km, der zur Sonne beträgt 150 Millionen km. Bestimmen Sie die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond und die Anziehungskraft zwischen Sonne und Mond. Warum bleibt der Mond dennoch an die Erde gebunden?

(Konstanten: $G = 6.67 \times 10^{-8}\,\text{cm}^3\,\text{g}^{-1}\,\text{s}^{-2}$)

Lösung: Es ergibt sich

$$F_{\text{Erde-Mond}} = 2 \times 10^{25}\,\text{dyn} \tag{s1.6}$$

$$F_{\text{Sonne-Mond}} = 4 \times 10^{25}\,\text{dyn} \tag{s1.7}$$

d.h., die Kraft, die die Sonne auf den Mond ausübt, ist *zwei Mal größer* als die Gravitationskraft, die die Erde auf den Mond ausübt.

Der Grund, warum der Mond dennoch an die Erde gebunden bleibt, ist, dass der Jacobi-Radius des Erde-Sonne-Systems einen Wert von $r_J = 1.5 \times 10^6$ km hat, d.h. 4× größer ist als der Abstand Erde-Mond.

d) Die Sagittarius Zwerggalaxie hat einen Abstand von 15 kpc von der Milchstrasse. Bestimmen Sie die Masse der Milchstrasse innerhalb von 10 kpc von ihrem Zentrum unter der Annahme, dass die Milchstrasse bis zu diesem Abstand eine konstante Rotationsgeschwindigkeit von $200\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$ hat und sphärische Symmetrie vorliegt. Zeigen Sie, dass die Sagittarius Zwerggalaxie eine Masse von $10^{10}\,M_\odot$ benötigen würde, damit Sterne, die 5 kpc von ihrem Zentrum entfernt sind, noch an die Zwerggalaxie gebunden sind (die tatsächliche Masse der Sagittarius Zwerggalaxie ist deutlich geringer, d.h. sie wird von der Milchstrasse zerrissen).

(Zahlenwerte: $1\,\text{pc} = 3.09 \times 10^{18}$ cm).

Lösung: Die Masse der Milchstrasse innerhalb von 15 kpc, $M_<$, ergibt sich unter der Annahme sphärischer Symmetrie und kreisförmiger Bahnen einfach aus

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_< m}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad M_< = \frac{r v^2}{G} = 2.77 \times 10^{44}\,\text{g} = 10^{11}\,M_\odot \tag{s1.8}$$

Die Abschätzung für die notwendige Masse ergibt sich mit dieser Masse einfach aus der Gleichung für den Jacobi-Radius.

e) Diskutieren Sie mit Ihren Kollegen, welche wesentlichen Näherungen in die obigen Rechnungen eingingen (die erstaunlicherweise das Hauptergebnis nicht stark beeinflussen).

Lösung: Mögliche Punkte sind:

- Sphärische Symmetrie – allerdings sind Dark Matter Halos sphärisch symmetrisch und dominieren die Massenverteilung.
- Kreisbahn – typischerweise würden wir elliptische Bahnen erwarten, in diesem Fall kann allerdings der Jacobi-Radius jeweils von der instantanen Bahngeschwindigkeit und Abstand her abgeleitet werden.

Frage 2: *Strömgren Sphären und Strömgren Radius*

Im Jahr 1939 untersuchte Bengt Strömgren den Einfluß, den junge Sterne auf das Interstellare Medium haben. Er konnte zeigen, daß diese Objekte aufgrund ihrer starken UV-Strahlung ihre Umgebung vollständig ionisieren können, so daß sich um sie herum sogenannte H II-Regionen bilden.
In dieser Aufgabe werden wir den Radius einer solchen H II-Region oder Strömgren-Sphäre berechnen unter der vereinfachten Annahme reinen Wasserstoffgases. Wir nehmen an, der Stern sei von einer ionisierten Zone von Gas umgeben, die damit für ionisierte Strahlung vollständig durchlässig ist. Strahlung des Sterns kann daher durch diese Zone durchgehen, wird aber von der weiter außen liegenden nicht-ionisierten Zone absorbiert.

a) Der Wirkungsquerschnitt für Absorption pro H-Atom ist ungefähr $\sigma \sim 10^{-17}\,\mathrm{cm}^2$, die typische Anzahldichte des Gases um die Sterne herum ist $n \sim 10^3\,\mathrm{cm}^{-3}$. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass die Strahlung hinter eine Gaswolke mit optischer Tiefe $\tau = n\sigma\ell$ gegeben ist durch

$$dI = -n\sigma d\ell \quad \Longrightarrow \quad I(\ell) = I_0 e^{-n\sigma\ell} \tag{2.1}$$

Zeigen Sie, dass die mittlere freie Weglänge für ein Photon durch *neutrales* Wasserstoffgas gegeben ist durch

$$\delta \sim \frac{1}{n\sigma} \sim 10^{14}\,\mathrm{cm} \tag{2.2}$$

Dies ist klein im Vergleich zu kosmischen Entfernungen, d.h. die Photonen werden quasi instantan im neutralen Gas absorbiert.

Lösung: Für die Intensität in der Gaswolke gilt

$$I(\ell) = I_0 e^{-n\sigma\ell} \tag{s2.1}$$

Damit ist die mittlere Weglänge für ein Photon gegeben durch

$$\langle\ell\rangle = \frac{\int_0^\infty \ell e^{-n\sigma\ell} d\ell}{\int_0^\infty e^{-n\sigma\ell} d\ell} = \frac{1}{n\sigma}\frac{\int_0^\infty x e^{-x} dx}{\int_0^\infty e^{-x} dx} = \frac{1}{n\sigma} \tag{s2.2}$$

Dabei wird benötigt $\int xe^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C$ (partielle Integration!).

b) Sämtliche vom Zentralstern ausgesandten ionisierenden Photonen werden nun vom neutralen Wasserstoff ausserhalb der Kugel absorbiert, die damit wächst. Zeigen Sie, dass das Wachstumsrate des Radius, dR/dt, der Gleichung

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2 n}\frac{dN}{dt} \tag{2.3}$$

genügt, wo dN die Zahl der im Zeitintervall dt vom Stern ausgestrahlten ionisierenden Photonen ist.

Lösung: Die Zahl der H-Atome in einer Schale mit Radius R und Dicke dR ist $4\pi R^2 n dR$, diese können von dN Photonen ionisiert werden, so dass

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi R^2 n \frac{dR}{dt} \tag{s2.3}$$

Einfaches Umstellen ergibt dann Gl. 2.3

c) Bislang haben wir ignoriert, daß die Ionen durch Stöße mit Elektronen auch wieder rekombinieren. Die Rate der Rekombinationen in einem Volumen für ein Gas mit der Elektronendichte n_e und der Ionendichte n ist gegeben durch

$$\mathrm{rate} = \int n n_\mathrm{e} \alpha(T; n, n_\mathrm{e}) dV \tag{2.4}$$

Hier ist $\alpha(T; n, n_\mathrm{e})$ der Rekombinationsparameter. Für Gas mit $T \lesssim 10^4\,\mathrm{K}$ und typischen Dichten $\alpha \sim 4 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Berechnen Sie die Rekombinationsrate in der Strömgrensphäre unter der Annahme, daß n und n_e konstant sind. Modifizieren Sie dann Gl. 2.3, so daß Sie die Rekombinationen mit berücksichtigen.

Lösung: Zunächst ist die Rekombinationsrate einfach

$$\mathrm{rate} = \frac{4\pi}{3} R^3 n n_\mathrm{e} \alpha \tag{s2.4}$$

Damit folgt

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi R^2 n \frac{dR}{dt} + \frac{4\pi}{3} R^3 n n_\mathrm{e} \alpha \tag{s2.5}$$

da die ionisierende Strahlung alle rekombinierenden Wasserstoffatome wieder ionisieren muss, was das Wachstum der Strömgrensphäre hemmt.

d) Die Strömgrensphäre hat ihre maximale Größe erreicht, wenn $dR/dt = 0$. Zeigen Sie, dass dies der Fall ist bei einem Radius

$$R_\mathrm{S}^3 = \frac{3}{4\pi n n_\mathrm{e} \alpha} \frac{dN}{dt} = \frac{3}{4\pi n^2 \alpha} \frac{dN}{dt} \tag{2.5}$$

Dies ist der Radius, bei dem die vom Stern pro Sekunde emittierte Zahl an ionisierenden Photonen gerade ausreicht, die Rate der Rekombinationen in der ionisierten Kugel zu kompensieren.

Lösung: Setzen von $dR/dt = 0$ und Auflösen nach R ergibt das gewünschte Ergebnis.