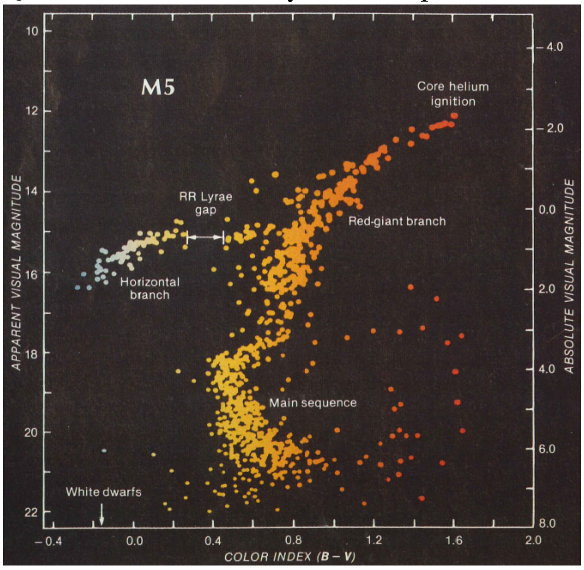
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Galaxien und Kosmologie

Wintersemester 2011/2012
Übungsaufgaben 02 – Musterlösung
J. Wilms
10. November 2011

Frage 1: *Die Entfernung zum galaktischen Zentrum*

Quelle: A. Hirshfield, Sky & Telescope, Dec. 1984, p. 498



Kugelsternhaufen haben eine Metallizität, die deutlich geringer ist, als die der Sonne. Das führt dazu, dass sich manche Sterne in Kugelsternhaufen im Laufe ihrer Entwicklung auch im sogenannten Horizontalast im Hertzsprung-Russell-Diagramm aufhalten werden und dabei den Instabilitätsstreifen durchlaufen. Diese Sterne werden RR Lyrae-Sterne genannt. Der Horizontalast ist daher durch eine kleine Lücke von den Roten Riesen getrennt und in HRDs oder Farben-Helligkeits-Diagrammen einfach erkennbar (siehe Abbildung).

a) Von Ihren Betreuern haben Sie zwei FHDs von Kugelsternhaufen erhalten. Identifizieren Sie den Horizontalast und messen Sie die scheinbare Helligkeit des blauen Endes der RR Lyr-Lücke. Bestimmen Sie daraus das Entfernungsmodul und die Entfernung (in kpc) dieser Kugelsternhaufen. Beachten Sie dabei die von Staub in der Milchstrasse hervorgerufene Extinktion in Richtung dieser Objekte!
Tip: Sie sollten die Formel für das Entfernungsmodul eigentlich wissen. Wenn nicht, dann sollten Sie sich diese aus der Definition der Magnitude

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \tag{1.1}$$

herleiten können.

Lösung: Die absolute Helligkeit ist die Magnitude, die ein astronomisches Objekt bei einer Entfernung von 10 pc haben würde. Damit ist das Entfernungsmodul

$$m - M = -2.5\log_{10}\left(\frac{L/4\pi d^2}{L/4\pi(10\,\mathrm{pc})^2}\right) = -2.5\log_{10}\left((d/1\,\mathrm{pc})^{-2}\right) - 5 = 5\log_{10}(d/1\,\mathrm{pc}) - 5 \tag{s1.1}$$

b) Für Ihre Kugelsternhaufen wird auf Ihrem Handout auch die galaktische Länge, ℓ, und die Breite, b, angegeben. Berechnen Sie mit der oben ermittelten Entfernung die Koordinaten des Kugelsternhaufens in einem auf das Sonnensystem zentrierten kartesischen Koordinatensystem. Dabei weise die x-Achse auf das galaktische Zentrum ($\ell = 0°$, $b = 0°$), die y-Achse in eine Richtung 90° östlich davon ($\ell = 90°$, $b = 0°$) und die z-Achse weist zum galaktischen Nordpol ($b = 90°$).

Lösung: Mit den Angaben in der Aufgabe erhalten wir

$$x = r\cos\ell\cos b \tag{s1.2}$$
$$y = r\sin\ell\cos b \tag{s1.3}$$
$$z = r\sin b \tag{s1.4}$$

(Überprüfung der Formeln durch Einsetzen der drei in der Aufgabe angegebenen Koordinaten).

c) Ihre Betreuer werden jetzt die einzelnen Kugelsternhaufen aufrufen, x, y, z in eine Tabelle eintragen und danach die Verteilung der Kugelsternhaufen im Raum plotten (Schnitte durch die x-z-Ebene und die x-y-Ebene). Diskutieren Sie mit Ihren Kommilitonen diese Verteilung:
- Gehören Kugelsternhaufen zur Scheiben- oder zur Halopopulation?
- Bestimmen Sie gemeinsam aus Ihren obigen Messungen die Entfernung zum galaktischen Zentrum.

Frage 2: *Galaxienhelligkeiten*

Die Anzahldichte von Sternen in einer Galaxie ist gegeben durch

$$n(R,z) = n_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{h_z}\right) \tag{2.1}$$

Hier ist R der Abstand vom galaktischen Zentrum und z die Höhe über der Scheibe.

a) Bestimmen Sie aus Gl. 2.1 die Oberflächendichte Σ der Sterne als Funktion von R, d.h. die Zahl der Sterne pro Flächenelement der Scheibe. Warum gilt damit für den radialen Verlauf der Flächenhelligkeit

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \tag{2.2}$$

Lösung: Die Oberflächendichte ist

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z)dz \tag{s2.1}$$

... und aus Symmetriegründen

$$= 2\int_0^{+\infty} n(z)dz \tag{s2.2}$$

$$= 2n_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{z}{h_z}\right) dz \tag{s2.3}$$

... und damit

$$= 2n_0 h_z \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) \tag{s2.4}$$

Da wegen des konstanten Masse-Leuchtkraftverhältnisses von Sternen die Flächenhelligkeit proportional zur Sterndichte Σ ist, folgt Gl. (2.2).

Anmerkung: Allerdings können h_R und h_z vom Typ des betrachteten Objekts (Stern, Molekülwolken usw.) abhängen! So ist in der Sonnenumgebung $h_z \sim 150\,\mathrm{pc}$ für neutrales Wasserstoffgas und $h_z \sim 65\,\mathrm{pc}$ für Molekülwolken.

b) Bestimmen Sie die Gesamtleuchtkraft einer Spiralgalaxie, deren Flächenhelligkeit durch Gl. (2.2) gegeben ist.

Lösung:

$$L = \int_0^{\infty} I(R) 2\pi R\, dR = 2\pi I_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right) R\, dR = 2\pi I_0 h_R^2 \tag{s2.5}$$

c) Für die Milchstrasse ist $L \sim 1.5 \times 10^{10}\, L_\odot$ und $h_R = 3\,\mathrm{kpc}$. Zeigen Sie, dass am solaren Radius ($r = 8\,\mathrm{kpc}$) die Flächenhelligkeit $18\, L_\odot\, \mathrm{pc}^{-2}$ beträgt.

Lösung: Einfaches Einsetzen in Gl. (s2.5) ergibt $I_0 = 265.26\, L_\odot\, \mathrm{pc}^{-2}$, die restliche Rechnung ist dann trivial.

d) Erklären Sie, warum die Flächenhelligkeit einer Galaxie ($\mathrm{mag\,arcsec}^{-2}$) *nicht* von der Entfernung der Galaxie abhängt.

Lösung: Der Einfachheit halber sei angenommen, alle Sterne hätten die gleiche Helligkeit, L. Die Galaxie sei bei einer Entfernung r. Dann ist der von einem Volumen gemessene Fluss gegeben durch

$$F = N \frac{L}{4\pi r^2} \tag{s2.6}$$

Die Zahl der Sterne, N, kann jetzt geschrieben werden als

$$N = A \cdot \Sigma \tag{s2.7}$$

wo Σ die Säulendichte der Sterne ist und A die betrachtete Fläche ist. Diese kann geschrieben werden als

$$A = \Omega \cdot r^2 \tag{s2.8}$$

wo Ω das betrachtete Kugelflächenelement ist. Damit ist unsere Messgröße

$$\frac{F}{\Omega} = r^2 \Sigma \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{\Sigma L}{4\pi} \tag{s2.9}$$

und daher unabhängig von r.

Anmerkung 1: Eine Umrechnung in Magnituden ist hier nicht notwendig!

Anmerkung 2: Werden verschiedene Teile einer Galaxie betrachtet, dann ist beobachtete Varianz von F proportional $\sqrt{N}$ und damit entfernungsabhängig. Dies ist die Grundlage der später noch genauer betrachteten Methode zur Bestimmung von Entfernungen aufgrund der Fluktuation der Oberflächenhelligkeit der Galaxien.

Frage 3: *Galaxien als stossfreie Systeme*

Dies ist eine freiwillige Denkaufgabe, die Sie zu Hause bearbeiten können.

In der Vorlesung wurde die Bewegung von Gas und Sternen in der Galaxie als Bewegung in einem "glatten" Potential beschrieben. Dieser Ansatz ist nur gerechtfertigt, wenn die Wechselwirkung zwischen einzelnen Sternen vernachlässigbar ist. In dieser Aufgabe werden Sie zeigen, warum dies der Fall ist.

a) **Starke Wechselwirkung:** Der offensichtlichste Fall der Wechselwirkung zwischen zwei Sternen ist der, wenn zwei Sterne so nahe aneinander vorbeifliegen, dass ihre Bahn signifikant beeinflusst wird. Das ist sicherlich dann der Fall, wenn die Änderung der potentiellen Energie zu dem Zeitpunkt, an dem die Sterne zueinander am nächsten sind, so gross ist wie die anfängliche kinetische Energie. Für den einfachsten Fall zweier Sterne gleicher Massen ist dies der Fall wenn

$$\frac{Gm^2}{r} \gtrsim \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{das heisst, für} \qquad r \lesssim r_s = \frac{2Gm}{v^2} \tag{3.1}$$

wobei hier v die Relativgeschwindigkeit der Sterne ist.

i. Zeigen Sie, dass die mittlere Zeit zwischen zwei derartigen Zusammenstößen gegeben ist durch

$$t_s = \frac{v^3}{4\pi G^2 m^2 n} \tag{3.2}$$

wo n die mittlere Anzahldichte der Sterne im betrachteten Volumen ist.

Lösung: Wir nehmen an, der betrachtete Stern bewege sich mit Geschwindigkeit v durch ein Medium mit der Sterndichte n. Starke Wechselwirkungen finden mit allen Sternen statt, die dem Stern in einem Zeitraum t näher als r_s kommen, d.h. mit allen Sternen innerhalb des Volumens $\pi r_s^2 vt$. Diese Zahl ist

$$N = n\pi r_s^2 vt \tag{s3.1}$$

Die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist damit (setze $N = 1$!)

$$t_s = \frac{1}{n\pi r_s^2 v} = \frac{v^2}{4n\pi G^2 m^2} \tag{s3.2}$$

ii. Berechnen Sie t_s für die Sonnenumgebung, d.h. für $v = 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (die typische Geschwindigkeitsdispersion in unserer Umgebung), $m = 1\,M_\odot$ und $n = 0.1\,\mathrm{pc^{-3}}$. Vergleichen Sie diese Zahl mit dem Alter des Universums.

Lösung: Allgemein ist

$$t_s = 4\times10^{12}\,\mathrm{yr}\left(\frac{v}{10\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^3\left(\frac{m}{1\,M_\odot}\right)^{-2}\left(\frac{n}{1\,\mathrm{pc^{-3}}}\right)^{-1} \tag{s3.3}$$

Für die Sonnenumgebung ergibt sich $t_s = 10^{15}\,\mathrm{yr}$, oder $10^6\times$ das Alter des Universums. Eine Gefahr von Sternzusammenstößen besteht also in der Sonnenumgebung nicht.

iii. Der Kugelsternhaufen 47 Tuc hat in seinem Zentrum eine Sterndichte von $50000\,\mathrm{pc^{-3}}$ und eine Geschwindigkeitsdispersion von $10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Was ist die typische Zeitskala zwischen starken Zusammenstößen in diesem System?

Lösung: Hier ist $t_s = 8\times10^7\,\mathrm{yr}$, d.h. klein gegen das Alter des Universums. Für Kugelsternhaufen können damit Zusammenstöße nicht vernachlässigt werden.

Anmerkung: Tatsächlich werden in Kugelsternhaufen sogenannte “blue stragglers” gesehen, d.h. Sterne, die im HRD hinter der allgemeinen Sternentwicklung “hinterherhinken” und deutlich jünger sind, als alle anderen Sterne im Kugelsternhaufen (in diesen findet ja keine weitere Sternentstehung statt). Es wird angenommen, dass die “blue stragglers” durch Sternkollisionen enstehen, ebenso die grössere Zahl eng gebundener Doppelsternsysteme in Kugelsternhaufen. Siehe Davies & Benz (1995, MNRAS 276, 876; `http://arxiv.org/abs/astro-ph/9507025`) für genauere Rechnungen.

b) **schwache Wechselwirkungen** Für die Galaxie sind starke Zusammenstöße nach den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe nicht relevant. Sterne erleben jedoch auch viele “schwache Wechselwirkungen” mit weiter entfernten anderen Sternen. Auch diese Wechselwirkungen könnten prinzipiell die Bahn eines Sterns so stark ändern, dass der Potentialansatz nicht mehr gilt. Den Einfluss dieser Wechselwirkungen betrachten wir in dieser Teilaufgabe.
Wir betrachten den Vorbeiflug eines Sterns der Masse M mit Geschwindigkeit v an einem Stern der Masse m. Der geringste Abstand der Sterne sei durch den “impact parameter” b gegeben. Um die Geschwindigkeitsänderung genau auszurechnen, müssten wir eigentlich das Zweikörperproblem der Wechselwirkung zweier Sterne lösen. Das ist zwar möglich (es ergeben sich Hyperbelbahnen), ist aber für eine Abschätzung unnötig aufwendig. Wir gehen daher davon aus, dass die Wechselwirkung so schwach ist, dass sie die Bahn von M nicht signifikant stört, so dass sich M effektiv geradlinig bewegt (wir rechnen also in Störungstheorie erster Ordnung).

Anmerkung: Ein so gut wie identischer Ansatz wird übrigens auch bei der Berechnung des Spektrums der Bremsstrahlung aus einem ionisierten Plasma benutzt (siehe `http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/radproc/radprocchap5toc.html`).

i. Zeigen Sie, dass die aufgrund des Vorbeiflugs verursachte Geschwindigkeitsänderung von M rechtwinklig zu seiner Ausbreitungsrichtung

$$\Delta v_\perp = \frac{2GM}{bv} \tag{3.3}$$

beträgt.

Lösung: Als Funktion der Zeit ist die Gravitationskraft zwischen m und M gegeben durch

$$F_\perp = \frac{GmMb}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \tag{s3.4}$$

Da

$$F_\perp = M\frac{dv_\perp}{dt} \tag{s3.5}$$

ist damit

$$\Delta v_\perp = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\perp(t)\,dt = \frac{2Gm}{bv} \tag{s3.6}$$

In Richtung entlang der Bewegung von M findet aus Symmetriegründen keine Geschwindigkeitsänderung statt, da die Beschleunigung vor dem Vorbeiflug durch die Abbremsung nach dem Vorbeiflug kompensiert wird.

ii. Zeigen Sie, dass der Ablenkwinkel von M damit

$$\alpha = \frac{2GM}{bv^2} \tag{3.4}$$

beträgt.

Lösung: Der Ablenkwinkel ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{\Delta v_\perp}{v} = \frac{2GM}{bv^2} \tag{s3.7}$$

(für Licht wäre damit $\alpha = 2GM/bc^2$, in der allgemeinen Relativitätstheorie erhält man aber $\alpha = 4GM/bc^2$, die Messung während einer Sonnenfinsternis, das dem tatsächlich so ist, war entscheidend für die Akzeptanz der ART).

iii. Wir nehmen jetzt die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne als zufällig im Raum verteilt an. Das bedeutet, dass der Stern in alle Richtungen gestört wird. Zur Bestimmung der gesamt übertragenen Geschwindigkeit, $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle$, müssen wir daher die einzelnen $\Delta v_\perp$ quadratisch addieren. Zeigen Sie durch Integration zwischen einem minimalen und einem maximalen Impakt-Parameter, dass

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle \sim \frac{8\pi G^2 m^2 n t}{v} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \tag{3.5}$$

Lösung: Die Überlegungen hier sind analog zu denen, die zu Gl. (s3.2) führten. Zur Bestimmung von $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle$ müssen wir die Geschwindigkeitsänderungen aufgrund aller Sterne in einem Volumen aufaddieren. Da alle Sterne in einem Volumen $vt2\pi b\,db$ das gleiche $\Delta v_{\mathrm{perp}}^2$ erzeugen, ergibt sich

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} nVt \left(\frac{2Gm}{bv}\right)^2 2\pi b\,db = \frac{8\pi G^2 m^2 n t}{v} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \tag{s3.8}$$

iv. Die sogenannte *Relaxationszeit* ist die Zeit, bei der $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = v^2$. Zeigen Sie, dass diese gegeben ist durch

$$t_{\mathrm{relax}} = \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln\Lambda} = \frac{t_{\mathrm{s}}}{2\ln\Lambda} \tag{3.6}$$

wo $\ln\Lambda = \ln(b_{\max}/b_{\min})$.

Anmerkung: $\ln\Lambda$ heisst in der Plasmaphysik der "Coulomb Logarithmus".

Lösung: Setzen von $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = v^2$ und Auflösen nach t ergibt

$$t_{\mathrm{relax}} = \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln\Lambda} = \frac{t_{\mathrm{s}}}{2\ln\Lambda} \tag{s3.9}$$

v. Nehmen Sie an, dass $b_{\min} = r_{\mathrm{s}}$ aus Teilaufgabe a) und $300\,\mathrm{pc} \lesssim b_{\max} \lesssim 30\,\mathrm{kpc}$. Zeigen Sie durch Berechnung der Relaxationszeitskala für die Sonnenumgebung und für 47 Tuc, dass für die Sonnenumgebung auch schwache Wechselwirkungen keine Rolle spielen, so dass in der Galaxie die Bahnen durch das mittlere Galaxienpotential gegeben sind, während dieser Effekt in Kugelsternhaufen auch berücksichtigt werden muss.

Lösung: Für die Sonnen ist nach Gl. (3.1) $r_{\mathrm{s}} = 3\times 10^{11}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{AU} = 2\times 10^{-5}\,\mathrm{pc}$. Damit ist $\ln\Lambda = 16\ldots 21$. Die Zeitskala für Relaxation in der Milchstrasse ist damit immer noch viele Größenordnungen größer als das Alter des Universums.
Im Gegensatz dazu ist in Kugelsternhaufen die Relaxationszeit sehr kurz (einige 10 Millionen Jahre). Da Λ nur logarithmisch eingeht, hat der genaue Wert von $b_{\min}$ und $b_{\max}$ kaum einen Einfluss, d.h. für die Rechnung kann der gleiche Wert für $\ln\Lambda$ wie für das Sonnensystem

genommen werden – die logarithmische Abhängigkeit ist auch der Grund dafür, warum wir auch b_{min} sehr grob abschätzen dürfen.

Anmerkung: Damit spielen in Kugelsternhaufen Einzelwechselwirkungen der Sterne eine wichtige Rolle. Das ist analog zur Wechselwirkung von Atomen in Gasen, die auch hauptsächlich durch Einzelwechselwirkungen interagieren. Daher ist zu erwarten, dass die Geschwindigkeitsverteilung von Sternen in Kugelsternhaufen den ähnlichen Gesetzen genügt, wie in Gasen, d.h. letztendlich eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist. Das wird tatsächlich beobachtet und die Dichteverteilung der Sterne in Kugelsternhaufen kann in erster Ordnung gut beschrieben werden durch ein selbstgravitatives System, in dem sich Einzelteilchen (=Sterne) mit einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung bewegen (=isothermes System).

Änderungen in der Verteilung ergeben sich daher, dass Kugelsternhaufen keine geschlossenen Systeme sind, sondern Sterne "verdampfen" können (=in's Gravitationspotential der Milchstrasse überwechseln können). Damit kühlen Kugelsternhaufen langsam ab (ebenso wie durch die Bindung von Energie in engen Doppelsternsystemen, die durch enge Zusammenstöße gebildet werden können). Auch dieser Effekt wird bei alten Kugelsternhaufen beobachtet.