Galaxien und Kosmologie
Wintersemester 2011/2012
Übungsaufgaben 05 – Musterlösung
J. Wilms
10. Januar 2012

Frage 1: *Entwicklung von Universen*

In der Vorlesung hatten wir die Friedmann-Gleichung hergeleitet als

$$\dot{R}^2 = +\frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - kc^2 \tag{1.1}$$

a) Warum gilt für normale Materie ("Staub") $\rho_{\mathrm{m}}(t) \propto R(t)^{-3}$?

Lösung: Mit der Expansion des Universums dehnt sich der Raum aus. Da für gleiche Teilchenzahl das Volumen $\propto R(t)^3$ ansteigt, fällt die Dichte ab wie $\propto R(t)^{-3}$.

b) Wir betrachten jetzt ein nur von Materie gefülltes, flaches Universum, d.h. den Fall $k = 0$. Dieser Fall wird das "Einstein-de Sitter-Universum" genannt. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ("heute") sei die Dichte des Universums $\rho(t_0) = \rho(0)$.

i) Zeigen Sie, dass die Friedmann-Gleichung unter diesen Annahmen geschrieben werden kann als

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0^3}{R(t)} \tag{1.2}$$

wo $R_0 = R(t_0)$.

Lösung: Mit den Ergebnissen des ersten Teils ergibt sich

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{R_0^3}{R(t)^3} \tag{s1.1}$$

Einsetzen von $\rho(t)$ in die Friedmann-Gleichung ergibt die gewünschte Gleichung.

ii) Lösen Sie die Friedmann-Gleichung unter der Randbedingung $R(0) = 0$.
(*Lösung:* $R(t) \propto t^{2/3}$)

Lösung: Mit

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0^3}{R(t)} = \frac{\xi}{R(t)} \quad \Longrightarrow \quad \dot{R} = \xi^{1/2} R(t)^{-1/2} \tag{s1.2}$$

Trennung der Variablen:

$$\int_0^{R(t)} R^{1/2}\, dR = \int_0^t \xi^{1/2}\, dt \tag{s1.3}$$

und damit

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}\xi^{1/2}\right)^{2/3} t^{2/3} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3}}\right)^{2/3} t^{2/3} \tag{s1.4}$$

iii) Der Hubble-Parameter ist gegeben durch $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$. Zeigen Sie, dass das Alter des materiedominierten Universums gegeben ist durch $t_0 = 2/(3H_0)$ wo $H_0 = H(t_0)$.

Lösung: Zunächst ist

$$H_0^2 = \frac{\dot{R}^2(t_0)}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \tag{s1.5}$$

und daher ist Eq. (s1.4)

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3} t^{2/3} \tag{s1.6}$$

Da $R(t_0) = R_0$ folgt daraus einfach das Weltalter

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{s1.7}$$

Anmerkung: Wenn der gemessene Wert für H_0 eingesetzt wird, dann ergibt sich ein Weltalter, das jünger ist, als die ältesten Sterne. Daher kann unser Universum nicht $\Omega = 1$ haben.

c) **Diese Teilaufgabe ist freiwillig**. In Teilaufgabe a) hatten wir eine Entwicklungsgleichung für die Dichte von Teilchen betrachtet. Für allgemeine Gase muss die zeitliche Entwicklung der Dichte aus ihrer Zustandsgleichung hergeleitet werden. Wir können dabei das Verhalten des Gases (=Licht, Galaxien, dunkle Materie) aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik herleiten,

$$dE + p\,dV = T\,dS \tag{1.3}$$

i) Relativistisch betrachtet ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = \frac{4\pi}{3}R^3\rho c^2 \tag{1.4}$$

Bestimmen Sie für ein expandierendes Universum dE/dt und dV/dt.

Lösung: Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi}{3}R^3\dot{\rho}c^2 + 4\pi\dot{R}R^2\rho c^2 \tag{s1.8}$$

Ferner ist wegen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2\dot{R} \tag{s1.9}$$

ii) Die Expansion des Universums kann als reversibel angesehen werden, d.h. Sie können ansetzen $dS = 0$. Zeigen Sie, dass mit den Ergebnissen aus der obigen Teilaufgabe folgt

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \tag{1.5}$$

Diese Gleichung ist die “Flüssigkeitsgleichung”, sie zeigt, dass zwei Terme für die Änderung der Dichte im Universum verantwortlich sind, einer Verdünnung aufgrund der Ausdehnung des Universums und einem Energieverlust, da das Material mit der Ausdehnung Arbeit leistet. Beachten Sie, dass dies *nicht* bedeutet, dass der Gasdruck bei der Expansion hilft (da der Druck überall gleich gross ist, wirkt keine Kraft!).

Lösung: Dies ergibt sich einfach aus

$$\frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \tag{s1.10}$$

iii) Das in der vorherigen Teilaufgabe betrachtete materiedominierte Universum entsprach dem Fall $p = 0$, d.h. es wurde angenommen, dass die Gravitation den Gasdruck vollständig dominiert. Sobald Material relativistisch heiss ist, ist das nicht mehr der Fall, sondern es gilt eine allgemeinere Zustandsgleichung der Form $p = (\gamma - 1)\rho c^2$, wo $0 < \gamma < 2$. Finden Sie Entwicklungsgleichungen für $\rho(R(t))$, $R(t)$ und damit $\rho(t)$ für Universen mit Materie, die dieser Zustandsgleichung genügt. Nehmen Sie wieder ein flaches Universum mit $k = 0$ an.

Lösung: Einsetzen der Zustandsgleichung in die Flüssigkeitsgleichung ergibt

$$r\dot{h}o + 3\gamma \frac{\dot{R}}{R}\rho = 0 \tag{s1.11}$$

und damit

$$\frac{1}{\rho(t)}\frac{d\rho}{dt} = -3\gamma \frac{1}{R(t)}\frac{dR}{dt} \tag{s1.12}$$

Nach Integration über t erhält man damit

$$\ln\left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right) = -3\gamma \ln\left(\frac{R(t)}{R_0}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho(t)}{\rho_0} = \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-3\gamma} \tag{s1.13}$$

Einsetzen in die Friedmann-Gleichung ergibt

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{R_0^{-3\gamma}} R^{-3\gamma+2} \quad \Longrightarrow \quad \dot{R} = \zeta R^{1-3\gamma/2} \tag{s1.14}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$R(t) = \zeta^{2/3\gamma} t^{2/3\gamma} \tag{s1.15}$$

Damit ist

$$\rho(t) \propto t^{-2} \tag{s1.16}$$

iv) Was ist die Entwicklungsgleichung für $p = -\rho c^2$? (*Anmerkung:* Letztere Zustandsgleichung ist die Zustandsgleichung für Vakuum.)

Lösung: Hier ergibt sich

$$\rho = \rho_0 \tag{s1.17}$$

(wie erwartet – für Vakuum sollte die Energiedichte unabhängig vom Entwicklungszustand des Universums sein) und

$$R(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\, t\right) \tag{s1.18}$$

Ein Universum, in dem eine Vakuumenergiedichte dominiert, expandiert damit exponentiell.