



Frage 1: Das Hubble-Diagramm

a) Zeigen Sie, dass aus der Hubble-Beziehung

$$v = Hd \quad (1.1)$$

und aus der Definition des Entfernungsmoduls,

$$m - M = 5 \log d - 5 \quad (1.2)$$

folgt, dass

$$m = M - 5 - 5 \log H_0 + 5 \log(cz) \quad (1.3)$$

Für Standardkerzen ($M = \text{const.}$) besteht also eine lineare Beziehung zwischen der scheinbaren Helligkeit m und $\log(cz)$.

Lösung: Mit $cz = H_0 d$ und

$$m - M = 5 \log d - 5 \iff \log d = (m - M + 5)/5 \quad (s1.1)$$

ist

$$\log(cz) = \log H_0 + \log d = \log H_0 + \frac{m - M + 5}{5} \iff m = M - 5 - 5 \log H_0 + 5 \log(cz) \quad (s1.2)$$

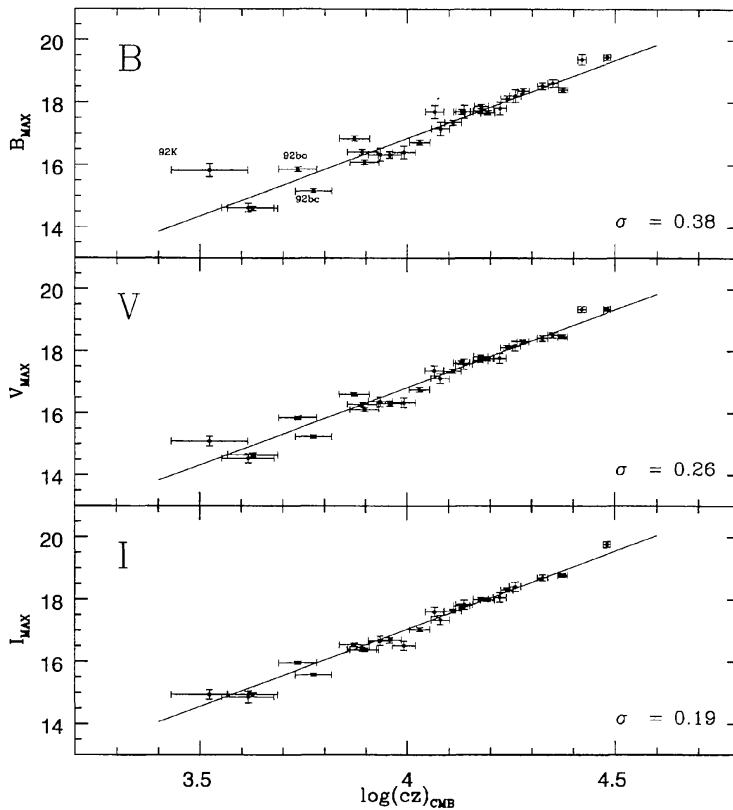
Wichtig: obiges gilt nur, so lange H als konstant angenommen werden kann (Faustregel: bis zu $z \sim 0.2$), für größere z muss die Beziehung für die nicht konstante Expansion des Universums korrigiert werden.

b) Die folgende Tabelle von Hamuy et al. (1996, AJ 112(6), 2398) enthält die Peak-Magnituden von 32 nahen SN Ia aus dem Calán/Tolo-Sample. Die *scheinbare* Helligkeit der Supernovae ist in der Spalte V_{MAX} gegeben. Zeigen Sie durch Plotten einer Auswahl der Quellen, dass diese näherungsweise Gl. 1.3 erfüllen.

TABLE 1. Colors and magnitudes of the Calán/Tololo supernovae Ia.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
SN	log(cz) CMB	B _{MAX}	V _{MAX}	I _{MAX}	B _{MAX} -V _{MAX}	M _{MAX} ^B +5log(H ₀ /65)	M _{MAX} ^V +5log(H ₀ /65)	M _{MAX} ^I +5log(H ₀ /65)	Δm ₁₅ (B)	EW(NaID) [Å]
90O	3.958(28)	16.32(10)	16.31(08)	16.70(09)	0.01(05)	-19.40(17)	-19.41(16)	-19.02(17)	0.96(10)	<0.2
90T	4.080(22)	17.16(21)	17.12(16)	17.35(15)	0.04(10)	-19.17(24)	-19.21(19)	-18.98(19)	1.15(10)	1.0
90Y	4.066(22)	17.70(21)	17.37(16)	17.61(15)	0.33(10)	-18.56(24)	-18.89(20)	-18.65(19)	1.13(10)	<4.0
90af	4.178(17)	17.87(07)	17.82(06)	—	0.05(03)	-18.95(11)	-19.00(11)	—	1.56(05)	<0.2
91S	4.223(16)	17.81(21)	17.77(16)	18.07(15)	0.04(10)	-19.24(22)	-19.28(18)	-18.98(17)	1.04(10)	<0.4
91U	3.992(28)	16.40(21)	16.34(16)	16.52(15)	0.06(10)	-19.49(25)	-19.55(21)	-19.37(20)	1.06(10)	0.8
91ag	3.616(63)	14.62(14)	14.54(15)	14.86(19)	0.08(05)	-19.40(35)	-19.48(35)	-19.16(37)	0.87(10)	0.0
92J	4.137(20)	17.70(21)	17.58(16)	17.84(15)	0.12(10)	-18.92(23)	-19.04(19)	-18.78(18)	1.56(10)	<0.2
92K	3.523(92)	15.83(21)	15.09(16)	14.94(15)	0.74(10)	-17.72(44)	-18.46(42)	-18.61(42)	1.93(10)	<0.2
92P	3.897(35)	16.08(07)	16.11(06)	16.39(06)	-0.03(03)	-19.34(18)	-19.31(18)	-19.03(18)	0.87(10)	1.2
92ae	4.351(12)	18.62(12)	18.51(08)	—	0.11(05)	-19.07(13)	-19.18(10)	—	1.28(10)	<0.5
92ag	3.891(36)	16.41(08)	16.28(07)	16.41(06)	0.13(05)	-18.98(19)	-19.11(18)	-18.98(18)	1.19(10)	1.1
92al	3.627(60)	14.60(07)	14.65(06)	14.94(06)	-0.05(03)	-19.47(32)	-19.42(31)	-19.13(31)	1.11(05)	<0.05
92aq	4.481(09)	19.45(09)	19.35(07)	19.77(09)	0.10(05)	-18.89(16)	-18.99(08)	-18.57(10)	1.46(10)	<1.1
92au	4.260(14)	18.21(21)	18.16(16)	18.41(15)	0.05(10)	-19.03(22)	-19.08(18)	-18.83(17)	1.49(10)	<1.3
92bc	3.774(44)	15.16(07)	15.24(06)	15.58(05)	-0.08(03)	-19.64(23)	-19.56(23)	-19.22(22)	0.87(05)	<0.2
92bg	4.030(25)	16.72(08)	16.76(07)	17.04(06)	-0.04(05)	-19.36(15)	-19.32(14)	-19.04(14)	1.15(10)	<0.3
92bh	4.131(20)	17.70(08)	17.62(06)	17.80(06)	0.08(05)	-18.89(13)	-18.97(11)	-18.79(11)	1.05(10)	<0.5
92bk	4.240(15)	18.11(10)	18.11(07)	18.31(06)	0.00(05)	-19.03(12)	-19.03(10)	-18.83(10)	1.57(10)	<0.4
92bl	4.110(20)	17.36(08)	17.36(07)	17.64(06)	0.00(05)	-19.13(13)	-19.13(12)	-18.85(12)	1.51(10)	<0.5
92bo	3.736(46)	15.86(07)	15.85(06)	15.97(05)	0.01(03)	-18.76(25)	-18.77(25)	-18.65(24)	1.69(05)	<0.2
92bp	4.374(11)	18.41(07)	18.46(06)	18.78(06)	-0.05(05)	-19.40(09)	-19.35(08)	-19.03(08)	1.32(10)	<1.1
92br	4.420(10)	19.38(17)	19.34(10)	—	0.04(05)	-18.66(18)	-18.70(11)	—	1.69(10)	<4.0
92bs	4.279(14)	18.37(09)	18.30(07)	—	0.07(05)	-18.96(11)	-19.03(10)	—	1.13(10)	<3.1
93B	4.326(13)	18.53(11)	18.41(09)	18.70(10)	0.12(05)	-19.04(13)	-19.16(11)	-18.87(12)	1.04(10)	<0.5
93H	3.872(37)	16.84(08)	16.61(06)	16.55(06)	0.23(05)	-18.45(19)	-18.68(19)	-18.74(19)	1.69(10)	1.2
93O	4.193(17)	17.67(07)	17.76(06)	17.99(06)	-0.09(03)	-19.23(11)	-19.14(10)	-18.91(10)	1.22(05)	<0.1
93ag	4.177(18)	17.72(08)	17.69(06)	18.01(06)	0.03(05)	-19.10(12)	-19.13(11)	-18.81(11)	1.32(10)	?
93ah	3.935(29)	16.33(21)	16.37(16)	16.68(15)	-0.04(10)	-19.28(26)	-19.24(22)	-18.93(21)	1.30(10)	?

Calán/Tololo SNe Ia
Raw Hubble Diagrams



Lösung:

- c) Zur Anpassung von Daten, (x_i, y_i) , mit Messunsicherheiten σ_i , an eine Modellfunktion, $f(x; \vec{p})$, die von einem Parametervektor \vec{p} abhängt, wird häufig ein Ansatz benutzt, bei dem die Funktion

$$\chi^2(\vec{p}) = \frac{\sum_i (y_i - f(x_i; \vec{p}))^2}{\sigma_i^2} \quad (1.4)$$

minimiert wird. Normalerweise ist dies nur numerisch möglich. Zeigen Sie, dass für eine lineare Funktion

$$f(x; a, b) = ax + b \quad (1.5)$$

die analytische Lösung für die “best fit” Parameter a , b durch

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i}{\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i x_i)^2} \quad (1.6)$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_i y_i - \frac{a}{n} \sum_i x_i \quad (1.7)$$

gegeben ist wo die Summen über alle Datenpunkte gehen.

- d) Hamuy et al. finden nach einigen weiteren Korrekturen durch eine lineare Regression an die V-Band-Magnituden in der obigen Tabelle, dass

$$m_{V,\max} = 5 \log cz - 3.329 \quad (1.8)$$

und aus der Kalibration an nahen Supernovae ist $M_{V,\max} = -19.31$ mag. Was ergibt sich für H_0 ?

Lösung:

$$-3.329 = M - 5 - 5 \log H_0 \quad \implies \quad \log H_0 = (M - 5 + 3.329)/5 = -4.1962 \quad (s1.3)$$

und damit

$$H_0 = 6.37 \times 10^{-5} \text{ km s}^{-1} \text{ pc}^{-1} = 63.7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (s1.4)$$

(der letzte Schritt folgt daraus, dass d in Gl. s1.1 in pc angenommen wird, während H_0 normalerweise pro Mpc gemessen wird.)