



Nützliche Konstanten

Ohne Garantie auf Vollständigkeit!

Astronomische Einheit	$1 \text{ AU} = 150 \times 10^6 \text{ km}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\text{SB}} = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Sonnenmasse	$M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sonnenleuchtkraft	$L_{\odot} = 4 \times 10^{26} \text{ W}$
Absolute Helligkeit der Sonne	$M_{\odot} = 4.8 \text{ mag}$
Erdmasse	$M_{\oplus} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000 \text{ km s}^{-1}$

Frage 1: Dopplereffekt

Diese Frage basiert auf Problem 8–3 von Zeilik & Gregory.

Bei welcher Wellenlänge werden die folgenden Spektrallinien beobachtet?

- Eine Linie mit Ruhewellenlänge 500 nm, die von einem Stern emittiert wird, der sich mit 100 km s^{-1} auf uns zu bewegt.
- Die Kalzium-Linie bei $\lambda = 397 \text{ nm}$, die von einer Galaxie ausgesandt wird, die sich von uns mit einer Geschwindigkeit von $60\,000 \text{ km s}^{-1}$ entfernt.
- Eine Wolke neutralen Wasserstoffs, die eine Radiolinie bei einer Frequenz von $\nu = 1420.4 \text{ MHz}$ emittiert und sich von uns mit 200 km s^{-1} entfernt (da $\lambda \sim 21 \text{ cm}$ wird diese Linie die “21 cm-Linie” des Wasserstoffs genannt. Sie ist von großer Bedeutung in der Radioastronomie). Was ist die *Frequenz*, bei der diese Linie beobachtet wird?
- Wie stark variiert die Wasserstoff H α Linie ($\lambda = 656.3 \text{ nm}$) eines astronomischen Objekts maximal aufgrund der Bewegung der Erde um die Sonne?

Frage 2: Die habitable Zone

Die zur Zeit diskutierten Ideen zur möglichen Existenz von Leben auf Planeten außerhalb des Sonnensystems gehen davon aus, daß eine der wichtigsten Bedingungen für Leben das Vorhandensein flüssigen Wassers ist. Diese Idee hat zum Konzept der Existenz von “bewohnbaren Zonen” um einen Stern herum geführt. In dieser Frage werden wir uns mit Hilfe dieses Konzepts damit beschäftigen, wo Leben in unserem eigenen Sonnensystem möglich ist. Als Vereinfachung werden wir nur die Existenz flüssigen Wassers aufgrund eingestrahelter Sonnenstrahlung betrachten und andere Heizungsmechanismen, wie zum Beispiel aufgrund von Gezeitenkräften, nicht berücksichtigen. Ferner werden wir uns mit *qualitativen* Abschätzungen begnügen.

Dabei ist zu beachten, daß dieses Konzept zur Zeit in der Astrobiologie stark umstritten ist. Siehe dazu beispielsweise das Buch “What Does a Martian Look Like?: The Science of Extraterrestrial Life” von Jack Cohen und Ian Steward.

- a) Betrachte einen kugelförmigen Planeten mit Radius r , der sich auf einer Kreisbahn mit Entfernung d von einem Stern mit Leuchtkraft L bewegt. Die Gesamtleistung, die zur Heizung der Planetenoberfläche zur Verfügung steht, ist die gesamte eingestrahelte Leistung, P_{tot} , die von der sternzugewandten Seite des Planeten empfangen wird, abzüglich der von Wolken in der Atmosphäre reflektierten Strahlung. Diese Reflektivität des Planeten wird normalerweise durch seine Albedo, a , charakterisiert, die definiert ist als der Anteil der reflektierten Leistung. Damit ist die auf der Oberfläche des Planeten eingestrahelte Leistung $P_{\text{abs}} = (1 - a)P_{\text{tot}}$. Wir nehmen an, daß der Planet durch seine Atmosphäre gut genug isoliert ist und er schnell genug rotiert, daß ein Temperaturgleichgewicht auf der Planetenoberfläche erreicht werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn ein Gleichgewicht zwischen P_{abs} und der hauptsächlich im Infraroten abgestrahlten Leistung eingetreten ist. Dabei kann vereinfachend davon ausgegangen werden, daß der Planet fast wie ein schwarzer Körper strahlt, d.h. die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit kann durch eine modifizierte Stefan-Boltzmann-Gleichung beschrieben werden

$$P_{\text{em}} = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4$$

wo ϵ die sogenannte Emissivität des Planeten ist.

- b) Bestimme die mittlere Temperatur auf der Erde unter der Annahme einer mittleren Albedo von $a_{\oplus} = 0.3$. Nimm an, daß die Erde wie ein Schwarzkörper strahlt, d.h. $\epsilon_{\oplus} = 1$. Gib die Temperatur in Kelvin und Grad Celsius an.
- c) Die in der vorherigen Frage bestimmte Temperatur ist zu klein – die mittlere Temperatur auf der Erdoberfläche beträgt ungefähr $+17^{\circ}\text{C}$. Der Grund dafür ist der Treibhauseffekt. Ein Großteil der von der Erdoberfläche abgestrahlten Leistung wird in der Atmosphäre absorbiert und heizt diese auf. Aus Symmetriegründen wird nur die Hälfte abgestrahlt, die restliche Leistung kann dann wieder die Oberfläche aufheizen. Diese komplizierten Vorgänge können näherungsweise berücksichtigt werden, indem $\epsilon = 0.6$ angenommen wird. Was ergibt sich mit dieser Annahme für die Oberflächentemperatur der Erde?
- d) Auf der Erde wird Leben in Zonen mit mittleren Temperaturen zwischen -10°C und $+30^{\circ}\text{C}$ beobachtet. Dieser Temperaturbereich definiert grob die “habitable Zone” des Sonnensystems. Benutze diese Information, um den inneren und äußeren Rand der habitablen Zone heute zu bestimmen.
- e) Auf der Erde dauerte es ungefähr 4.6 Milliarden Jahre, bis sich intelligentes Leben entwickelte. Während dieser Zeit erhöhte sich die Leuchtkraft der Sonne um ca. 30%. Was ergibt sich daraus für die maximale Exzentrizität der Erdbahn? Nimm dabei der Einfachheit halber an, daß sich während dieser Zeit die Albedo und die Emissivität der Erde nicht änderten (diese Annahme ist aufgrund der sich ändernden Zusammensetzung der Erdatmosphäre, die durch das Vorhandensein von Leben verursacht wird, nicht korrekt!).

Frage 3: Cepheiden und Entfernungsbestimmung

- a) Das wichtigste Werkzeug in der Astronomie für die Bestimmung von Entfernungen zu anderen Galaxien ist die Perioden-Leuchtkraftbeziehung der δ Cephei sterne (“Cepheiden”). In dieser Aufgabe werden wir die Methode der sogenannten “Dimensionsanalyse” benutzen um zu zeigen, daß diese Beziehung auf Schwingungen von Gaskugeln zurückgeführt werden kann:

1. Überzeuge dich, daß $P = (G\rho)^{-1/2}$ die Einheit ("Dimension") einer Periode hat, i.e., s. Hier ist ρ die mittlere Dichte des Sterns.
 2. Benutze diese Proportionalität, $P \propto \rho^{-1/2}$, und die Abhängigkeit der Dichte des Sterns von Masse und Radius, $\rho \propto M/R^3$, um zu zeigen daß $\log P = c_1 + c_2 \log L$ wo c_1 und c_2 Konstanten sind. Benutze diese Abhängigkeit um zu zeigen, daß $\log P = c_3 - c_4 m$ wo m die Magnitude des Cepheiden ist und wo c_3 und c_4 weitere Konstanten sind. Benutze dabei, daß die Leuchtkraft des Sterns $L \propto R^2 T^4$ ist, wo R sein Radius und T seine Temperatur ist.
- b) Als Edwin Hubble das erste Mal Entfernungen mit Hilfe von Cepheiden bestimmte, wußte er noch nicht, daß es zwei sehr ähnliche Arten von Pulsationsveränderlichen gibt, die W Virginis Sterne und die δ Cepheiden. Diese zwei Objektarten haben ähnliche Perioden-Leuchtkraftbeziehungen, jedoch sind W Virginis sterne 1.5 mag schwächer als Cepheiden. In seinen ersten Entfernungsbestimmungen kalibrierte Hubble die Perioden-Leuchtkraftbeziehung mit W Vir-Sternen und wandte sie dann auf Beobachtungen von δ Cep-Sternen in anderen Galaxien an, um deren Entfernungen zu bestimmen. Walter Baade erkannte 1952 diesen Fehler. Um welchen Faktor änderten sich daher auf einen Schlag alle angenommenen Galaxienentfernungen?

Frage 4: Be-Sterne

- a) Die Sonne dreht sich am Äquator einmal in 25.38 Tagen um ihre Achse.
1. Bestimme die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne an ihrem Äquator.
 2. Wie stark verschiebt sich die $H\alpha$ -Linie zwischen dem östlichen und dem westlichen Rand der Sonne aufgrund dieser Rotation für einen unbewegten Beobachter?
- b) Manche Sterne drehen sich deutlich schneller als die Sonne, die durch den Sonnenwind schon einen großen Teil ihres Drehimpulses verloren hat. Die am schnellsten rotierenden Sterne sind Be-Sterne.
1. Bestimme die Fluchtgeschwindigkeit eines Sterns der Masse M und mit Radius R , d.h. die Geschwindigkeit, bei der Material den Stern verlassen kann.
 2. Ermittle daraus die maximale Rotationsperiode eines Sterns.
- c) Be-Sterne rotieren mit dieser maximalen Rotationsgeschwindigkeit. In ihrer Äquatorregion werden Scheiben heißen Plasmas gefunden, das vom Stern weggeflossen ist. Da dieses Gas sehr dünn ist, werden Emissionslinien detektiert (Der Spektraltyp Be bedeutet, daß es sich um Sterne vom Spektraltyp B mit Emissionslinien handelt). Ein typischer Be-Stern ist GX 301-2/Wray 977. Dieser Stern hat eine Leuchtkraft von $1.3 \times 10^6 L_{\odot}$.
1. Wray 977 befindet sich bei einer Entfernung von 5.3 kpc. Was ist seine scheinbare Helligkeit?
 2. Schätze mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung die Masse von Wray 977 ab.
 3. Schätze die Temperatur des Sterns aus seinem Spektraltyp ab und bestimme seinen Radius.
 4. Bestimme die Oberflächenbeschleunigung am Pol von Wray 977 und vergleiche sie mit der auf der Erde ($g_{\oplus} = 9.81 \text{ m s}^{-2}$).
 5. Wray 977 rotiert mit maximaler Rotationsgeschwindigkeit. Bestimme die Rotationsperiode des Sterns. Wie stark ist aufgrund der Rotation die $H\alpha$ -Absorptionslinie im Spektrum von Wray 977 verbreitert?

Frage 5: Eddington-Leuchtkraft

Sternoberflächen sind so heiß, daß das Gas in der Sternatmosphäre ionisiert ist. Das bedeutet, daß in Sternatmosphären freie Elektronen vorhanden sind. Diese Elektronen können effizient mit Strahlung aus dem Sterninneren wechselwirken. Sir Arthur Eddington erkannte in den 1920er Jahren, daß dies für Sterne zu einer maximal möglichen Leuchtkraft führt.

a) Die Kraft, die von Strahlung auf ein Elektron ausgeübt wird, ist gegeben durch

$$F_{\text{rad}} = \frac{\sigma_{\text{T}} S}{c} \quad (5.1)$$

hier ist S der Strahlungsfluß (Einheit: W cm^{-2}), c die Lichtgeschwindigkeit und σ_{T} der Thomson-Wirkungsquerschnitt,

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{e^4}{6\pi m_e^2 \epsilon_0^2 c^4} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ m}^2 \quad (5.2)$$

Überzeuge Dich, daß F_{rad} tatsächlich eine Kraft ist.

- b) Bestimme die Eddington-Leuchtkraft aus der Bedingung, daß Gas nur so lange gebunden ist, wie die nach “Innen” wirkende Gravitationskraft auf *Protonen* größer ist als die nach “Außen” wirkende Strahlungskraft auf *Elektronen*. Gib die Eddington-Leuchtkraft in Sonnenleuchtkräften als Funktion der Sternmasse in Einheiten der Sonnenmasse an. Warum können wir bei der Herleitung die Strahlungskraft auf Protonen vernachlässigen? Durch welche Wechselwirkung wird die auf Elektronen wirkende Kraft auf die Protonen übertragen?
- c) Bestimme die maximale Masse, die ein Hauptreihenstern haben kann. Mache dabei die (nur näherungsweise gültige) Annahme, daß die Masse-Leuchtkraft-Beziehung auch für sehr massereiche Sterne auf der Hauptreihe gilt.
- d) Was wäre die maximale Lebensdauer solcher Sterne auf der Hauptreihe, unter der Annahme, daß ein Stern die Hauptreihe verläßt, wenn er 10% seines Wasserstoffvorrates in Helium fusioniert hat?

Anmerkung: Tatsächlich leben solche Sterne deutlich länger, da sie sehr schnell große Mengen ihrer Hülle als Sternwind abstoßen. Das beste uns bekannte Beispiel für einen Stern kurz nach Abwerfen seiner Hülle ist η Carinae, der leuchtkräftigste Stern in unserer Milchstraße. Dieses Objekt hat in den letzten 1–2 Jahrhunderten bis zu $30 M_{\odot}$ Masse verloren (siehe Bild). Von 1837–1856 war η Car trotz seiner Entfernung von 2.3 kpc nach Sirius (Entfernung 2.6 pc) der zweithellste Stern am Himmel.

