Einführung in die Astronomie II

Sommersemester 2007
Übungsaufgaben 1 – Musterlösung

Nützliche Konstanten

Ohne Garantie auf Vollständigkeit!

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Sonnenleuchtkraft	$L_\odot = 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
Absolute Helligkeit der Sonne	$M_\odot = 4.8\,\mathrm{mag}$
Erdmasse	$M_\oplus = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Frage 1: *Dopplereffekt*

Diese Frage basiert auf Problem 8–3 von Zeilik & Gregory.
Bei welcher Wellenlänge werden die folgenden Spektrallinien beobachtet?

a) Eine Linie mit Ruhewellenlänge 500 nm, die von einem Stern emittiert wird, der sich mit $100\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ auf uns zu bewegt.

Lösung: Für $v \ll c$ ist die Dopplerverschiebung gegeben durch

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \qquad \text{(s1.1)}$$

Damit ist die gemessene Wellenlänge

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad \text{(s1.2)}$$

wobei $v > 0$ bedeutet, daß das emittierende Objekt sich von uns entfernt und wo $c = 300\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. In der Aufgabe bewegt sich der Stern auf uns zu, so daß $v = -100\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und daher $\lambda = 499.833\,\mathrm{nm}$.

b) Die Kalzium-Linie bei $\lambda = 397\,\mathrm{nm}$, die von einer Galaxie ausgesandt wird, die sich von uns mit einer Geschwindigkeit von $60\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ entfernt.

Lösung: Die Formel von oben ergibt $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$. Da jedoch eine Geschwindigkeit von $60\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ recht nahe an c ist, muß die relativistische Formel benutzt werden, also

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \qquad \text{(s1.3)}$$

und daher $\lambda = 486\,\mathrm{nm}$.

c) Eine Wolke neutralen Wasserstoffs, die eine Radiolinie bei einer Frequenz von $\nu = 1420.4\,\mathrm{MHz}$ emittiert und sich von uns mit $200\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ entfernt (da $\lambda \sim 21\,\mathrm{cm}$ wird diese Linie die “21 cm-Line” des Wasserstoffs genannt. Sie ist von großer Bedeutung in der Radioastronomie) . Was ist die *Frequenz*, bei der diese Linie beobachtet wird?

Lösung: Die Wellenlänge λ und die Frequenz ν sind verknüpft über

$$\lambda\nu = c \tag{s1.4}$$

Einsetzen von $\lambda = \nu/c$ in die obigen Formeln liefert

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (v/c)} \tag{s1.5}$$

und daher $\nu = 1419.45\,\mathrm{MHz}$.

d) Wie stark variiert die Wasserstoff Hα Linie ($\lambda = 656.3\,\mathrm{nm}$) eines astronomischen Objekts maximal aufgrund der Bewegung der Erde um die Sonne?

Lösung: Um diese Frage zu beantworten können wir die Bahn der Erde vereinfacht als eine Kreisbahn mit Radius $r = 1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km} = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ annehmen. Die Geschwindigkeit der Erde ist dann

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{s1.6}$$

Mit $T = 365.25 \times 86400 = 3.16 \times 10^7\,\mathrm{s}$ (also der Jahreslänge) finden wir $v = 29800\,\mathrm{m\,s^{-1}} \sim 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, beziehungsweise $\Delta\lambda/\lambda = v/c = 10^{-4}$. Die maximale Änderung der Hα Linie aufgrund der Erdbewegung ist damit $\Delta\Lambda = \pm 0.065\,\mathrm{nm}$.

Frage 2: *Die habitable Zone*

Die zur Zeit diskutierten Ideen zur möglichen Existenz von Leben auf Planeten außerhalb des Sonnensystems gehen davon aus, daß eine der wichtigsten Bedingungen für Leben das Vorhandensein flüssigen Wassers ist. Diese Idee hat zum Konzept der Existenz von “bewohnbaren Zonen” um einen Stern herum geführt. In dieser Frage werden wir uns mit Hilfe dieses Konzepts damit beschäftigen, wo Leben in unserem eigenen Sonnensystem möglich ist. Als Vereinfachung werden wir nur die Existenz flüssigen Wassers aufgrund eingestrahlter Sonnenstrahlung betrachten und andere Heizungsmechanismen, wie zum Beispiel aufgrund von Gezeitenkräften, nicht berücksichtigen. Ferner werden wir uns mit *qualitativen* Abschätzungen begnügen.
Dabei ist zu beachten, daß dieses Konzept zur Zeit in der Astrobiologie stark umstritten ist. Siehe dazu beispielsweise das Buch “ What Does a Martian Look Like?: The Science of Extraterrestrial Life” von Jack Cohen und Ian Steward.

a) Betrachte einen kugelförmigen Planeten mit Radius r, der sich auf einer Kreisbahn mit Entfernung d von einem Stern mitLeuchtkraft L bewegt. Die Gesamtleistung, die zur Heizung der Planetenoberfläche zur Verfügung steht, ist die gesamte eingestrahlte Leistung, P_{tot}, die von der sternzugewandten Seite des Planeten empfangen wird, abzüglich der von Wolken in der Atmosphäre reflektierten Strahlung. Diese Reflektivität des Planeten wird normalerweise durch seine Albedo, a, charakterisiert, die definiert ist als der Anteil der reflektierten Leistung. Damit ist die auf der Oberfläche des Planeten eingestrahlte Leistung $P_{\mathrm{abs}} = (1-a)P_{\mathrm{tot}}$. Wir nehmen an, daß der Planet durch seine Atmosphäre gut genug isoliert ist und er schnell genug rotiert, daß ein Temperaturgleichgewicht auf der

Planetenoberfläche erreicht werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn ein Gleichgewicht zwischen P_{abs} und der hauptsächlich im Infraroten abgestrahlten Leistung eingetreten ist. Dabei kann vereinfachend davon ausgegangen werden, daß der Planet fast wie ein schwarzer Körper strahlt, d.h. die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit kann durch eine modifizierte Stefan-Boltzmann-Gleichung beschrieben werden

$$P_{\text{em}} = \epsilon\sigma_{\text{SB}}T^4 \tag{2.1}$$

wo ϵ die sogenannte Emissivität des Planeten ist.

Lösung: Um die gesamte vom Planeten aufgenommene Leistung auszurechnen, benötigen wir den von der Sonne empfangenen Fluß, die sogenannte „Solarkonstante",

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{s2.1}$$

Die gesamte Leistung ist dann $F \cdot A$, wo $A = \pi r^2$ die projizierte sonnenzugewandte Fläche des Planeten ist. Daher ist die vom Planeten aufgenommene Leistung

$$P_{\text{tot}} = AF = \pi r^2 \cdot \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{Lr^2}{4d^2} \tag{s2.2}$$

Aufgrund der Albedo des Planeten kann nurein Teil der Leistung, $(1-a)P_{\text{tot}}$, den Planeten aufheizen. Wie in der Frage beschrieben, setzen wir dann diese Leistung gleich der vom Planeten emittierten Leistung,

$$P_{\text{abs}} = (1-a)P_{\text{tot}} = (1-a)\frac{Lr^2}{4d^2} \stackrel{!}{=} 4\pi r^2\epsilon\sigma_{\text{SB}}T^4 \tag{s2.3}$$

woraus sich für die Temperatur

$$T = \left(\frac{(1-a)L}{16\pi d^2\epsilon\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4} \tag{s2.4}$$

ergibt.

b) Bestimme die mittlere Temperatur auf der Erde unter der Annahme einer mittleren Albedo von $a_♁ = 0.3$. Nimm an, daß die Erde wie ein Schwarzkörper strahlt, d.h. $\epsilon_♁ = 1$. Gib die Temperatur in Kelvin und Grad Celsius an.

Lösung: Einsetzen der Zahlen ergibt

$$T = \left(\frac{(1-0.3)\cdot 4\times 10^{26}\,\text{W}}{16\pi\cdot 2.25\times 10^{22}\,\text{m}^2\cdot 5.7\times 10^{-8}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{K}^{-4}}\right)^{1/4} = \left(4.33\times 10^9\,\text{K}^4\right)^{1/4} = 256\,\text{K} \tag{s2.5}$$

entsprechend $T = -17°\text{C}$.

c) Die in der vorherigen Frage bestimmte Temperatur ist zu klein – die mittlere Temperatur auf der Erdoberfläche beträgt ungefähr +17°C. Der Grund dafür ist der Treibhauseffekt. Ein Großteil der von der Erdoberfläche abgestrahlten Leistung wird in der Atmosphäre absorbiert und heizt diese auf. Aus Symmetriegründen wird nur die Hälfte abgestrahlt, die restliche Leistung kann dann wieder die Oberfläche aufheizen. Diese komplizierten Vorgänge können näherungsweise berücksichtigt werden, indem $\epsilon = 0.6$ angenommen wird. Was ergibt sich mit dieser Annahme für die Oberflächentemperatur der Erde?

Lösung: Damit ergibt sich eine Temperatur von 19°C.

d) Auf der Erde wird Leben in Zonen mit mittleren Temperaturen zwischen −10°C und +30°C beobachtet. Dieser Temperaturbereich definiert grob die "habitable Zone" des Sonnensystems. Benutze diese Information, um den inneren und äußeren Rand der habitablen Zone heute zu bestimmen.

Lösung: Löse zunächst Eq. (s2.4) nach d auf:

$$d = \left(\frac{(1-a)L}{16\pi\epsilon\sigma_{\mathrm{SB}} T^4} \right)^{1/2} \tag{s2.6}$$

Die bewohnbare Zone ist definiert als der Bereich, in dem die Temperatur zwischen $T_{\mathrm{min}} = -10°\mathrm{C} = 263\,\mathrm{K}$ und $T_{\mathrm{max}} = +30°\mathrm{C} = 303\,\mathrm{K}$ ist. Damit ergibt sich für den äußeren Radius der bewohnbaren Zone

$$d_{\text{out, heute}} = \left(\frac{(1-0.3)\cdot 4\times 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 0.6 \cdot 5.7\times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot 4.78\times 10^{9}\,\mathrm{K}^4} \right)^{1/2} = 1.85\times 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.23\,\mathrm{AU} \tag{s2.7}$$

und auf ähnliche Art erhalten wir $d_{\text{in, heute}} = 1.39\times 10^{11}\,\mathrm{m} = 0.93\,\mathrm{AU}$.

e) Auf der Erde dauerte es ungefähr 4.6 Milliarden Jahre, bis sich intelligentes Leben entwickelte. Während dieser Zeit erhöhte sich die Leuchtkraft der Sonne um ca. 30%. Was ergibt sich daraus für die maximale Exzentrizität der Erdbahn? Nimm dabei der Einfachheit halber an, daß sich während dieser Zeit die Albedo und die Emissivität der Erde nicht änderten (diese Annahme ist aufgrund der sich ändernden Zusammensetzung der Erdatmosphäre, die durch das Vorhandensein von Leben verursacht wird, nicht korrekt!).

Lösung: Die ursprüngliche Leuchtkraft der Sonne am Anfang ihrer Lebenszeit auf der Hauptreihe war $L = 4\times10^{26}\,\mathrm{W}/1.3 = 3.08\times10^{26}\,\mathrm{W}$. Damit ergibt sich $d_{\text{out, Vergangenheit}} = 1.62\times10^{11}\,\mathrm{m} = 1.08\,\mathrm{AU}$ und $d_{\mathrm{in,past}} = 1.22\times 10^{11}\,\mathrm{m} = 0.81\,\mathrm{AU}$. Damit ist der Bereich von Entfernungen von der Sonne, die von Anfang an in der bewohnbaren Zone waren zwischen 0.93 AU und 1.08 AU. Diese Zahlen entsprechen den Perihel und Aphel Entfernungen des Planeten mit der größtmöglichen Exzentrizität, der immer in der bewohnbaren Zone war. Diese sind

$$d_{\mathrm{Perihel}} = a(1-e) \quad \text{and} \quad d_{\mathrm{Aphel}} = a(1+e) \tag{s2.8}$$

oder auch

$$\frac{d_{\mathrm{perihelion}}}{d_{\mathrm{aphelion}}} = \frac{1-e}{1+e} \tag{s2.9}$$

und damit

$$e = \frac{d_{\mathrm{aphelion}} - d_{\mathrm{perihelion}}}{d_{\mathrm{aphelion}} + d_{\mathrm{perihelion}}} = \frac{1.08\,\mathrm{AU} - 0.93\,\mathrm{AU}}{1.08\,\mathrm{AU} + 0.93\,\mathrm{AU}} = 0.07 \tag{s2.10}$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß aufgrund der Entwicklung von Sternen auf der Hauptreihe und aufgrund der Zeitskala für die Entwicklung von Leben ein Planet auf einer (fast) kreisförmigen Bahn sein muß, um (mehr oder weniger) intelligentes Leben zu ermöglichen. (*Anmerkung* Man kann zeigen, daß die Anwesenheit von Jupiterähnlichen Planeten auf kreisförmigen Bahnen mit großen Halbachsen zu einer Zirkularisierung von Planetenbahnen während der Bildung eines Sonnensystems führt. Wir verdanken damit zumindest einen Teil unserer Existenz der Anwesenheit von Jupiter.)

Frage 3: *Cepheiden und Entfernungsbestimmung*

a) Das wichtigste Werkzeug in der Astronomie für die Bestimmung von Entfernungen zu anderen Galaxien ist die Perioden-Leuchtkraftbeziehung der δ Cephei sterne ("Cepheiden"). In dieser Aufgabe werden wir die Methode der sogenannten "Dimensionsanalyse" benutzen um zu zeigen, daß diese Beziehung auf Schwingungen von Gaskugeln zurückgeführt werden kann:

1. Überzeuge Dich, daß $P = (G\rho)^{-1/2}$ die Einheit ("Dimension") einer Periode hat, i.e., s. Hier ist ρ die mittlere Dichte des Sterns.

Lösung: Die Einheit von $G\rho$ ist

$$\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}\cdot kg\,m^{-3} = kg\,m\,s^{-2}\cdot m^2\,kg^{-2}\cdot kg\,m^{-3} = s^{-2}} \tag{s3.1}$$

und damit wird $(G\rho)^{-1/2}$ wie erwartet in Sekunden gemessen.

2. Benutze diese Proportionalität,$P \propto \rho^{-1/2}$, und die Abhängigkeit der Dichte des Sterns von Masse und Radius, $\rho \propto M/R^3$, um zu zeigen daß $\log P = c_1 + c_2 \log L$ wo c_1 und c_2 Konstanten sind. Benutze diese Abhängigkeit um zu zeigen, daß $\log P = c_3 - c_4 m$ wo m die Magnitude des Cepheiden ist und wo c_3 und c_4 weitere Konstanten sind. Benutze dabei, daß die Leuchtkraft des Sterns $L \propto R^2 T^4$ ist, wo R sein Radius und T seine Temperatur ist.

Lösung: Mit Hilfe der angegebenen Proportionalitäten finden wir

$$P \propto \rho^{-1/2} \propto M^{-1/2} R^{3/2} \tag{s3.2}$$

da ferner $L \propto R^2 T^4$ is $R \propto L^{1/2} T^{-2}$ so daß

$$P \propto M^{-1/2} L^{3/4} T^{-3} \quad \text{or} \quad P = \xi_1 M^{-1/2} L^{3/4} T^{-3} \tag{s3.3}$$

wo ξ_1 eine Konstante ist. Nach Logarithmieren und dem Zusammenfassen aller uninteressanten Größen in einer weiteren Konstante, c_1, erhalten wir

$$\log P = c_1 + (3/4) \log L \tag{s3.4}$$

Da für Magnituden $m_2 - m_1 = -2.5 \log(F_2/F_1)$ und da der Fluß $F = L/4\pi r^2$, ergibt sich $m = \xi_2 - \xi_3 \log L$. Auflösen nach $\log L$ und Einsetzen in die Gleichung für $\log P$ ergibt dann die gewünschte Beziehung.

b) Als Edwin Hubble das erste Mal Entfernungen mit Hilfe von Cepheiden bestimmte, wußte er noch nicht, daß es zwei sehr ähnliche Arten von Pulsationsveränderlichen gibt, die W Virginis Sterne und die δ Cepheiden. Diese zwei Objektarten haben ähnliche Perioden-Leuchtkraftbeziehungen, jedoch sind W Virginis sterne 1.5 mag schwächer als Cepheiden. In seinen ersten Entfernungsbestimmungen kalibrierte Hubble die Perioden-Leuchtkraftbeziehung mit W Vir-Sternen und wandte sie dann auf Beobachtungen von δ Cep-Sternen in anderen Galaxien an, um deren Entfernungen zu bestimmen. Walter Baade erkannte 1952 diesen Fehler. Um welchen Faktor änderten sich daher auf einen Schlag alle angenommenen Galaxienentfernungen?

Lösung: Das Entfernungsmodul ist

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5 = 5 \log_{10}(d/10\,\mathrm{pc}) \tag{s3.5}$$

und damit ist die Entfernung

$$d = 10\,\mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5} \tag{s3.6}$$

Ist $m - M$ um 1.5 mag schwächer, dann bedeutet diese Gleichung, daß die Entfernungen um einen Faktor $10^{1.5/5} = 2$ falsch sind, oder, um mit den Zeitungen aus den 1950er Jahren zu sprechen, daß sich durch die Entdeckung, daß W Virginis Sterne und δ Cepheiden unterschiedliche Objekte sind, das „Universum verdoppelte“.

Frage 4: *Be-Sterne*

a) Die Sonne dreht sich am Äquator einmal in 25.38 Tagen um ihre Achse.

1. Bestimme die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne an ihrem Äquator.

Lösung: Der Sonnenradius ist $R_\odot = 700000\,\mathrm{km} = 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$ und damit ist die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne

$$v_\mathrm{rot} = \frac{2\pi R_\odot}{P} = \frac{2\pi \cdot 7 \times 10^8\,\mathrm{m}}{25.38 \cdot 86400\,\mathrm{s}} = 2000\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{s4.1}$$

2. Wie stark verschiebt sich die Hα-Linie zwischen dem östlichen und dem westlichen Rand der Sonne aufgrund dieser Rotation für einen unbewegten Beobachter?

Lösung: Der Geschwindigkeitsunterschied auf beiden Seiten der Sonne beträgt damit $4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und damit ist die Relativänderung der Linienlage

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = 7 \times 10^{-6} \tag{s4.2}$$

b) Manche Sterne drehen sich deutlich schneller als die Sonne, die durch den Sonnenwind schon einen großen Teil ihres Drehimpulses verloren hat. Die am schnellsten rotierenden Sterne sind Be-Sterne.

1. Bestimme die Fluchtgeschwindigkeit eines Sterns der Masse M und mit Radius R, d.h. die Geschwindigkeit, bei der Material den Stern verlassen kann.

Lösung: Die Bindungsenergie einer Masse m auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Masse M ist

$$E = -\frac{GMm}{R} \tag{s4.3}$$

Diese Bindungsenergie muß überwunden werden. Dazu ist eine kinetische Energie gleicher Größe notwendig. Damit ergibt sich für die Fluchtgeschwindigkeit

$$v_\mathrm{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{s4.4}$$

2. Ermittle daraus die maximale Rotationsperiode eines Sterns.

Lösung: Nach einfacher Rechnung ergibt sich

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \tag{s4.5}$$

c) Be-Sterne rotieren mit dieser maximalen Rotationsgeschwindigkeit. In ihrer Äquatorregion werden Scheiben heißen Plasmas gefunden, das vom Stern weggeflossen ist. Da dieses Gas sehr dünn ist, werden Emissionslinien detektiert (Der Spektraltyp Be bedeutet, daß es sich um Sterne vom Spektraltyp B mit Emissionslinien handelt). Ein typischer Be-Stern ist GX 301−2/Wray 977. Dieser Stern hat eine Leuchtkraft von $1.3 \times 10^6\,L_\odot$.

1. Wray 977 befindet sich bei einer Entfernung von 5.3 kpc. Was ist seine scheinbare Helligkeit?

Lösung: Es gilt

$$M_{\text{Wray}} - M_\odot = -2.5\log_{10}\left(\frac{L_{\text{Wray}}}{L_\odot}\right) \tag{s4.6}$$

(das folgt aus der Definition der Magnitude). Die absolute Helligkeit der Sonne ist $M_\odot = 4.8\,\text{mag}$. Damit ist $M_{\text{Wray}} = -10.5\,\text{mag}$. Mit Hilfe des Entfernungsmoduls ergibt sich dann

$$m_{\text{Wray}} = M_{\text{Wray}} + 5\log\left(\frac{d}{10\,\text{pc}}\right) = 3.12\,\text{mag} \tag{s4.7}$$

Anmerkung: In Wahrheit hat Wray 977 nur 10.8 mag, da er sich in der Milchstraßenebene befindet und daher seine Helligkeit aufgrund von Staub stark abgeschwächt wird.

2. Schätze mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung die Masse von Wray 977 ab.

Lösung: Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung für massereichere Sterne war

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 \tag{s4.8}$$

so daß $M_{\text{Wray}} = 33.8\,M_\odot$ (Achtung Symbolwechsel, das hier ist die Masse, nicht eine Magnitude!).

3. Schätze die Temperatur des Sterns aus seinem Spektraltyp ab und bestimme seinen Radius.

Lösung: Der Spektraltyp B hat eine typische Temperatur von 20000 K (mit großer Schwankung, aber genauer kann das aufgrund der Angaben in der Aufgabe nicht abgeschätzt werden). Da

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{\text{SB}} T^4 \tag{s4.9}$$

ist $R = 6.6 \times 10^{10}$ m oder ungefähr 94 Sonnenradien.

4. Bestimme die Oberflächenbeschleunigung am Pol von Wray 977 und vergleiche sie mit der auf der Erde ($g_\oplus = 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).

Lösung: Die Oberflächenbeschleunigung ist

$$g_{\text{Wray}} = \frac{GM}{R^2} = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \sim 0.1\,g_{\oplus} \tag{s4.10}$$

5. Wray 977 rotiert mit maximaler Rotationsgeschwindigkeit. Bestimme die Rotationsperiode des Sterns. Wie stark ist aufgrund der Rotation die Hα-Absorptionslinie im Spektrum von Wray 977 verbreitert?

Lösung: Mit Hilfe der obigen Formeln ergibt sich die maximale Rotationsperiode zu $P = 1.1 \times 10^6\,\text{s} = 13\,\text{d}$. Das entspricht einer Äquatorialgeschwindigkeit von $v = 2\pi R/P = 380000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ und damit einer Verbreiterung von $\Delta\lambda/\lambda = 0.001$. Im Optischen ($\lambda = 500\,\text{nm}$) haben daher Spektrallinien eine Breite von $2\Delta\lambda = 1\,\text{nm}$, was einfach nachweisbar ist.

Frage 5: *Eddington-Leuchtkraft*

Sternoberflächen sind so heiß, daß das Gas in der Sternatmosphäre ionisiert ist. Das bedeutet, daß in Sternatmosphären freie Elektronen vorhanden sind. Diese Elektronen können effizient mit Strahlung aus dem Sterninneren wechselwirken. Sir Arthur Eddington erkannte in den 1920er Jahren, daß dies für sterne zu einer maximal möglichen Leuchtkraft führt.

a) Die Kraft, die von Strahlung auf ein Elektron ausgeübt wird, ist gegeben durch

$$F_{\text{rad}} = \frac{\sigma_{\text{T}} S}{c} \tag{5.1}$$

hier ist S der Strahlungsfluß (Einheit: $\text{W}\,\text{m}^{-2}$), c die Lichtgeschwindigkeit und σ_{T} der Thomson-Wirkungsquerschnitt,

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{e^4}{6\pi m_{\text{e}}^2 \epsilon_0^2 c^4} = 6.65 \times 10^{-29}\,\text{m}^2 \tag{5.2}$$

Überzeuge Dich, daß F_{rad} tatsächlich eine Kraft ist.

Lösung: Hier war ein Tippfehler in der originalen Version der Frage, in MKS-Einheiten wird der Strahlungsfluß natürlich in $\text{W}\,\text{m}^{-2}$ und nicht in $\text{W}\,\text{cm}^{-2}$ gemessen. Ferner ist der obige Wert von σ_{T} korrekt, der ursprünglich angegebene war in cm^2. Tut mir leid, das kommt davon, wenn man cgs und mks benutzt... Die untenstehenden Zahlenwerte sind mit dem korrekten σ_{T} ermittelt worden.

F_{rad} ist eine Kraft, da es die Dimension einer Kraft hat:

$$\left[\frac{\sigma_{\text{T}} S}{c}\right] = \frac{\text{m}^2\,\text{W}\,\text{m}^{-2}}{\text{m}\,\text{s}^{-1}} = \frac{\text{J}\,\text{s}^{-1}}{\text{m}\,\text{s}^{-1}} = \text{J}\,\text{m}^{-1} = \text{N} \tag{s5.1}$$

b) Bestimme die Eddington-Leuchtkraft aus der Bedingung, daß Gas nur so lange gebunden ist, wie die nach "Innen" wirkende Gravitationskraft auf *Protonen* größer ist als die nach "Außen" wirkende Strahlungskraft auf *Elektronen*. Gib die Eddington-Leuchtkraft in Sonnenleuchtkräften als Funktion der Sternmasse in Einheiten der Sonnenmasse an. Warum können wir bei der Herleitung die Strahlungskraft auf Protonen vernachlässigen? Durch welche Wechselwirkung wird die auf Elektronen wirkende Kraft auf die Protonen übertragen?

Lösung: Gleichsetzen der nach Innen wirkenden Kraft auf die Protonen und der nach Außen wirkenden Kraft auf die Elektronen ergibt

$$\frac{GMm_{\mathrm{p}}}{r^2} = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}S}{c} = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}L}{4\pi r^2\, c} \quad \text{da} \quad S = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{s5.2}$$

Auflösen von Eq. (s5.2) nach L gibt dann die Eddington-Leuchtkraft:

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi G m_{\mathrm{p}} c}{\sigma_{\mathrm{T}}} M = 1.26 \times 10^{31}\,\mathrm{W}\,\frac{M}{M_\odot} =\sim 3.3 \times 10^4\, L_\odot\, \frac{M}{M_\odot} \tag{s5.3}$$

Da der Thomson-Wirkungsquerschnitt wie $1/m^2$ skaliert, und da die Masse der Protonen ca. 2000× größer ist, als die der Elektronen, ist die Streuwahrscheinlichkeit von Photonen an Protonen vernachlässigbar.

Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Protonen wird durch Coulomb-Kräfte bewirkt, so daß sich die durch die Strahlung auf die Elektronen ausgeübte Kraft indirekt auf die Protonen überträgt.

c) Bestimme die maximale Masse, die ein Hauptreihenstern haben kann. Mache dabei die (nur näherungsweise gültige) Annahme, daß die Masse-Leuchtkraft-Beziehung auch für sehr massereiche Sterne auf der Hauptreihe gilt.

Lösung: Der Einfachheit rechnen wir in solaren Einheiten. Gleichsetzen von Gl. (s5.3) und Gl. (s4.8) ergibt dann

$$3.3 \times 10^4 M = M^4 \quad \Longleftrightarrow \quad M = 32 \tag{s5.4}$$

Die massereichsten Sterne haben also nach dieser Abschätzung Massen von $32\,M_\odot$. In Wahrheit liegt diese Grenze bei 100–200 $M_\odot$, da die Masse-Leuchtkraft Beziehung für Sterne hoher Massen nicht mehr in der hier verwendeten Form stimmt, sondern eher $L \propto M^3$. Damit ist die Maximalmasse bei ungefähr $100\,M_\odot$, wie beobachtet.

d) Was wäre die maximale Lebensdauer solcher Sterne auf der Hauptreihe, unter der Annahme, daß ein Stern die Hauptreihe verläßt, wenn er 10% seines Wasserstoffvorrates in Helium fusioniert hat?

Lösung: Wir gehen hier von dem $32\,M_\odot$ Stern aus. Dieser verläßt die Hauptreihe, wenn er $3.2\,M_\odot = 6.4 \times 10^{30}$ kg H zu He fusioniert hat. Da der Stern bei seiner Eddington-Leuchtkraft leuchtet, hat er eine Leuchtkraft von 4×10^{32} W. Die bei der Fusion von einem kg Wasserstoff erzeugte Energie ist $0.007 \cdot mc^2 = 6.3 \times 10^{14}$ J, und damit kann der Stern mit 10% seiner Masse in H insgesamt 4×10^{45} J erzeugen. Daher kann er seine Leuchtkraft für insgesamt 10^{13} s = 320000 yr aufrecht erhalten, bevor er die Hauptreihe verläßt.

Anmerkung: da die Lebenszeit am Eddington-Limit skaliert wie $0.1 \cdot 0.007\, Mc^2/L_{\mathrm{Edd}}$ und da $L_{\mathrm{Edd}} \propto M$ ist die Lebensdauer eines Sterns, der am Eddington-Limit strahlt, unabhängig von der Masse des Sterns und damit von der angenommenen Masse-Leuchtkraft-Beziehung.

Anmerkung: Tatsächlich leben solche Sterne deutlich länger, da sie sehr schnell große Mengen ihrer Hülle als Sternwind abstoßen. Das beste uns bekannte Beispiel für einen Stern kurz nach Abwerfen seiner Hülle ist η Carinae, der leuchtkräftigste Stern in unserer Milchstraße. Dieses Objekt hat in den letzten 1–2 Jahrhunderten bis zu 30 $M_\odot$ Masse verloren (siehe Bild). Von 1837–1856 war η Car trotz seiner Entfernung von 2.3 kpc nach Sirius (Entfernung 2.6 pc) der zweithellste Stern am Himmel.