Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I

Wintersemester 2006/2007
Beispielklausur – Musterlösung

Allgemeine Regeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt *eine Stunde* (60 Minuten).
- Außer eines Taschenrechners sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- *Beide Fragen sind zu bearbeiten*.
- Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt **50 Punkte**.

Nützliche Konstanten

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Jahreslänge	$1\,\mathrm{Jahr} = 365.25\,\mathrm{Tage}$
Tageslänge	$1\,\mathrm{Tag} = 86400\,\mathrm{s}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Erdmasse	$M_\oplus = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Frage 1: *Sonnensystem*

a) Komet Wild 2 hat eine Perihelentfernung von 1.583 AU

i. Die Exzentrizität der Bahn ist $e = 0.540$. Berechnen Sie die große und kleine Halbachsen der Bahn. (**3 Punkte**)

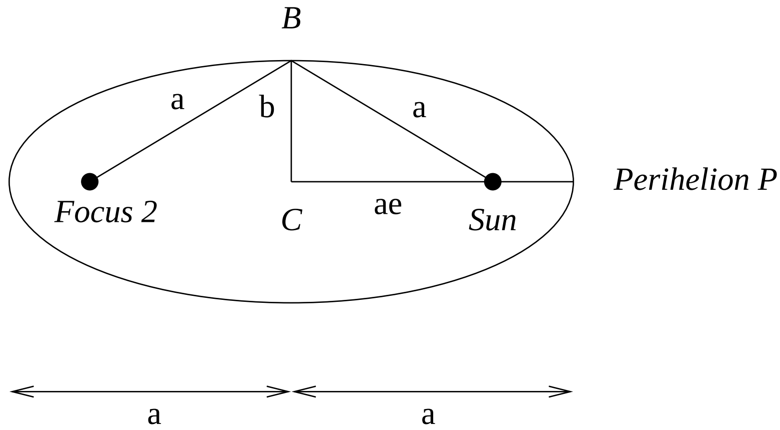
Lösung: Die Perihelentfernung ist

$$d_{\mathrm{per}} = a(1-e)$$

so daß die große Halbachse gegeben ist als (**1 Punkt**)

$$a = d/(1-e) = 3.441\,\mathrm{AU}$$

Die Formel für die kleine Halbachse kann aus der Definition einer Ellipse erhalten werden. Da in einer Ellipse die Summe der Entfernungen von beiden Brennpunkten zu einem Punkt auf der Ellipse gleich $2a$ ist, gilt die folgende Abbildung:



Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck C–Sonne–B gilt dann (**2 Punkte**)

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 2.87\,\mathrm{AU}$$

ii. Bestimmen Sie die Bahnperiode des Kometen. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Bahnperiode folgt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz. Für das Sonnensystem ist dieses (**1 Punkt**).

$$\frac{P^2_{\mathrm{Earth}}}{a^3_{\mathrm{Earth}}} = \frac{P^2_{\mathrm{comet}}}{a^3_{\mathrm{comet}}}$$

Wird die Periode P in Jahren und die große Halbachse a in AU gemessen, dann ist das Verhältnis gleich 1, so daß (**1 Punkt**)

$$P = a^{3/2} = 6.38\,\mathrm{Jahre}$$

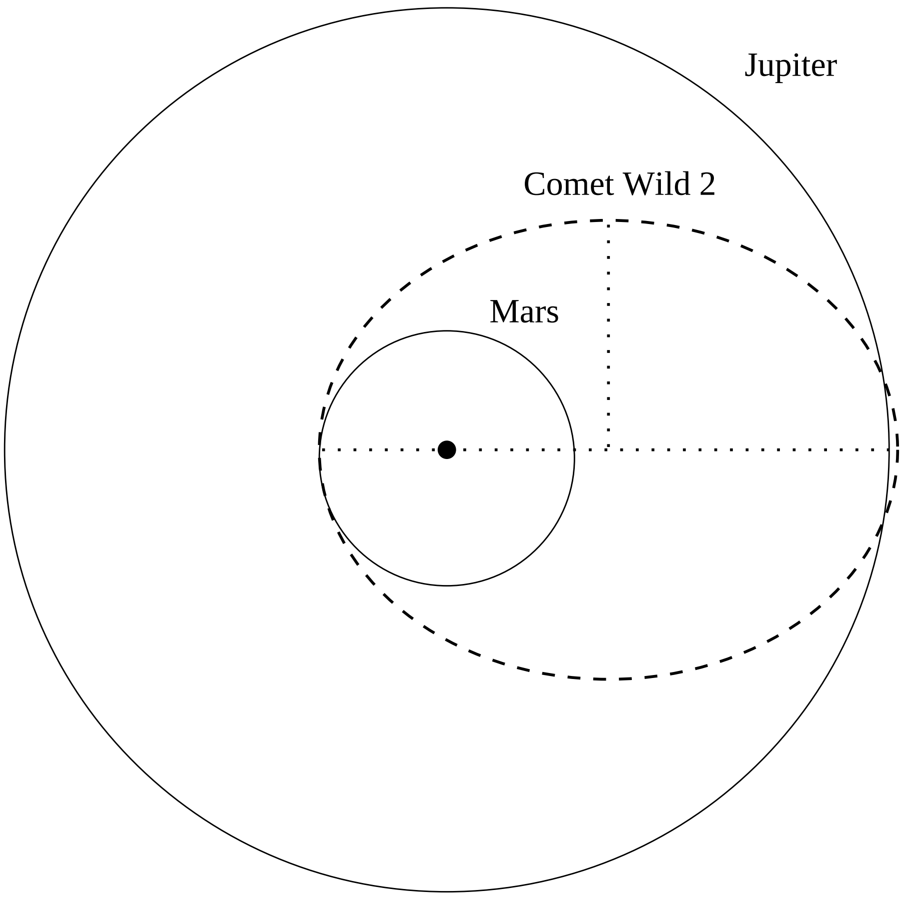
iii. Berechnen Sie die Aphel-Entfernung von Wild 2. (**1 Punkt**)

Lösung: Die Aphel-Entfernung ist (**1 Punkt**)

$$d_{\mathrm{aphelion}} = a(1 + e) = 5.3\,\mathrm{AU}$$

iv. Skizzieren Sie die Bahnen von Wild 2, Mars und Jupiter. Sie können annehmen, daß die Jupiter- und Marsbahnen kreisförmig sind. Die Bahnperiode von Mars ist $P_{♂} = 1.88$ Jahre, die des Jupiter beträgt $P_{♃} = 11.86$ Jahre. (**5 Punkte**)

Lösung: Mit der gegebenen Information für Mars und Jupiter können ihre Bahnradien mit Hilfe des 3. Kepler'schen Gesetzes erhalten werden: $a_{♂} = 1.523$ AU und $a_{♃} = 5.2$ AU (**2 Punkte**). Diese werte sind *sehr* nahe zu den Perihel- und Aphel-Entfernungen der Kometen, so daß die Zeichnung der Bahn prinzipiell sehr einfach ist, wenn noch der oben gefundene Wert für die kleine Halbachse berücksichtigt wird (**3 Punkte**):



b) Die Jupitermonde umkreisen den Planeten auf Kreisbahnen. Die Bahnperiode von Europa beträgt $P_{\mathrm{Europa}} = 3.55$ Tage und ihre Halbachse ist $a_{\mathrm{Europa}} = 671000$ km. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Masse des Jupiter und geben Sie diese in kg und Erdmassen an. Welche Annahmen benutzen Sie? (**6 Punkte**)

Lösung: Die korrekte Beantwortung dieser Frage setzt die Kenntnis der physikalischen Form von Keplers 3. Gesetz voraus (**1 Punkt**):

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{\mathrm{J}} + m_{\mathrm{E}})}$$

wo m_{J} und M_{E} die Massen von Jupiter und Europa sind und wo a der Radius der Europa-Bahn ist. Wir müssen dabei annehmen, daß $m_{\mathrm{E}} \ll m_{\mathrm{J}}$ (**2 Punkte**), was mit Ausnahme des Erde-Mond-Systems eine gute Annahme ist. Daher ist (**1 Punkt**)

$$m_{\mathrm{J}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2}$$

mit

$$a = 671000\,\mathrm{km} = 6.71 \times 10^8\,\mathrm{m}$$
$$P = 3.55\,\mathrm{Tagen} = 306720\,\mathrm{s}$$

ergibt sich die Jupitermasse zu (**2 Punkte**)

$$m_{\mathrm{J}} = \frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}} \cdot \frac{3.02 \times 10^{26}\,\mathrm{m}^3}{9.41 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^2} = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg} = 317\,M_{\oplus}$$

(der korrekte Wert, der mit einer genaueren Methode erhalten wurde, ist 318 $M_{\oplus}$)

c) Vergleichen Sie in tabellarischer Form die Planeten Erde und Mars. Gehen Sie dabei auf die Atmosphärenzusammensetzung, Kraterhäufigkeit, Vulkanismus und Oberflächenmerkmale ein. (**8 Punkte**)

Lösung:

	Mars	**Erde**
Struktur	Erdähnlicher Planet	Erdähnlicher Planet
Oberflächenstrukturen	feste Oberfläche, kein aktiver Vulkanismus, frühere tektonische Aktivität (Valles Marinieris!), Polkappen	Feste Oberfläche und Ozeane, aktive Vulkane, aktive Plattentektonik, Polkappen
Atmosphäre	dünn, durch Kohlendioxid dominiert, dünne Wolken, klare Jahreszeiten, Staubstürme	dicht, Sauerstoff, Stickstoff, Wolken, klare Jahreszeiten
Masse	deutlich geringer als Erde	

Frage 2: *Sterne*

a) Die Solarkonstante, d.h. der auf der Erde von der Sonne empfangene Strahlungsfluß beträgt $F = 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

i. Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Leuchtkraft der Sonne. (**3 Punkte**)

Lösung: Unter Benutzung von (**1 Punkt**)

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

ergibt sich die Sonnenleuchtkraft, L, zu (**2 Punkte**)

$$L = 4\pi r^2 F = 4\pi \cdot 2.25 \times 10^{22}\,\mathrm{m}^2 \cdot 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}} = 3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$$

ii. Von der Erde aus betrachtet hat die Sonne einen Winkeldurchmesser von 0.5°. Bestimmen Sie daraus den Durchmesser der Sonne in km. Welche Näherungen können Sie machen? (**2 Punkte**)

Lösung: Der Winkeldurchmesser der Sonne in Radian ist (**1 Punkt**)

$$\alpha = 0.5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 8.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

Daher ist der Sonnendurchmesser gegeben durch (**1 Punkt**)

$$D = \alpha r = 8.7 \times 10^{-3} \cdot 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$$

(N.B. Beachte, daß hier aufgrund der kleinen Winkel *keine* Trigonometrie notwendig ist!)

iii. Bestimmen Sie aus diesen Ergebnissen die pro Quadratmeter Sonnenoberfläche emittierte Leistung. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Oberfläche der Sonne ist (**1 Punkt**)

$$A = 4\pi r^2 = 5.3 \times 10^{18}\,\mathrm{m}^2$$

wo r der Sonnenradius ist ($r = D/2$). Daher ist die pro Quadratmeter emittierte Leistung (**1 Punkt**)

$$F = \frac{L}{A} = \frac{3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}}{5.3 \times 10^{18}\,\mathrm{m}^2} = 7.36 \times 10^{7}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

iv. Bestimmen Sie mit Hilfe des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes die Oberflächentemperatur der Sonne. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Oberflächentemperatur der Sonne ist (**2 Punkte**)

$$T = \left(\frac{F}{\sigma_{\mathrm{SB}}}\right)^{1/4} = \left(\frac{7.36 \times 10^{7}\,\mathrm{W\,m^{-2}}}{5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}}\right) = 6000\,\mathrm{K}$$

b) Die absolute Helligkeit von RR Lyrae-Sternen beträgt $M_{\mathrm{RR}} = 0.6\,\mathrm{mag}$ bei einer Oberflächentemperatur von 7000 K.

i. In einem Kugelsternhaufen werden RR Lyr-Sterne mit einer scheinbaren Helligkeit von $m = 17\,\mathrm{mag}$ beobachtet. Geben Sie das Entfernungsmodul des Kugelsternhaufens an und berechnen Sie seine Entfernung in Parsec und Lichtjahren. Sie können annehmen, daß der Durchmesser des Kugelsternhaufens klein ist gegenüber seiner Entfernung. (**3 Punkte**)

Lösung: Das Entfernungsmodul ist (**1 Punkt**)

$$\mathrm{DM} = m - M = 17\,\mathrm{mag} - 0.6\,\mathrm{mag} = 16.4\,\mathrm{mag}$$

Da

$$m - M = 5 \log D - 5$$

wo m und M die scheinbare und absolute Magnituden eines Sterns sind und wo D seine Entfernung in Parsec ist. Daher ist (**2 Punkte**)

$$D = 10^{(m-M)/5+1} = 19000\,\mathrm{pc} = 62000\,\mathrm{ly}$$

da 1 pc = 3.26 ly.

ii. Berechnen Sie die Leuchtkraft der RR Lyr-Sterne in Einheiten der Sonnenleuchtkraft. Die absolute Helligkeit der Sonne beträgt 4.8 mag. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Beziehung zwischen den Magnituden und Flüssen zweier Sterne ist (**1 Punkt**)

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log(F_1/F_2)$$

Da $F = L/4\pi d^2$ ergibt sich die Beziehung zwischen den absoluten Magnituden und den Leuchtkräften von Sonne und einem RR Lyrae Stern zu

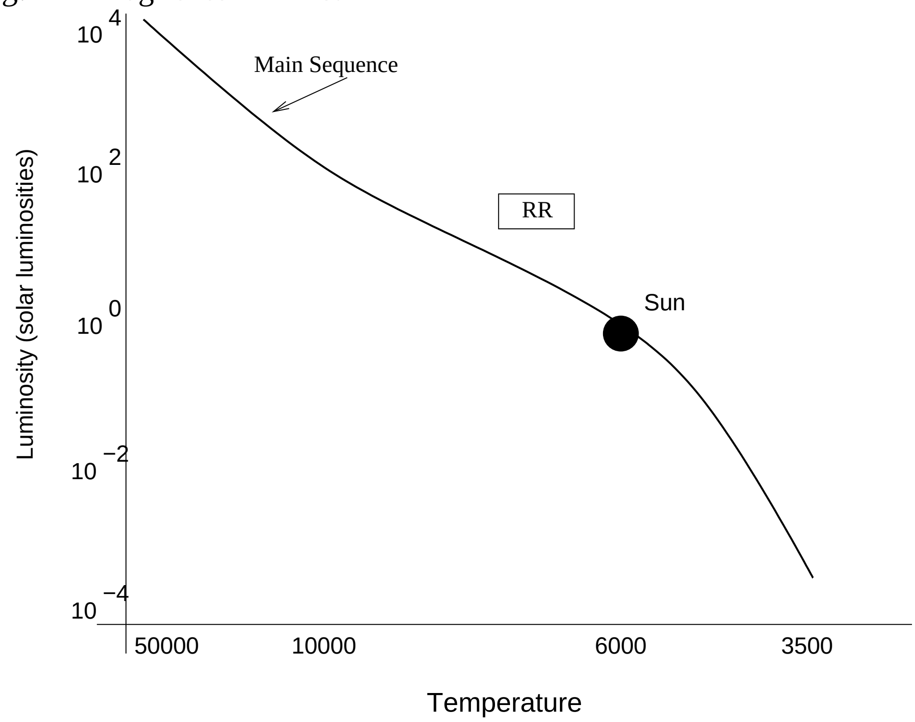
$$M_{\odot} - M_{\mathrm{RR}} = 2.5 \log(L_{\mathrm{RR}}/L_{\odot})$$

so daß (**1 Punkt**)

$$\frac{L_{\mathrm{RR}}}{L_{\odot}} = 10^{(M_{\odot} - M_{\mathrm{RR}})/2.5} = 48$$

iii. Zeichnen Sie in ein typisches Hertzsprung-Russell-Diagramm die Lage der Hauptreihe, der Sonne und der RR Lyr-Sterne ein. (**5 Punkte**)

Lösung: Ein mögliches HRD ist



Wichtig sind die korrekte Achsenbeschriftung, einschließlich der ungefähren Leuchtkraft- und Temperaturbereiche, die Position der Sonne und der Hauptreihe und die Feststellung, daß RR Lyr-Sterne nicht auf der Hauptreihe liegen können.

iv. Schätzen Sie unter Verwendung der obigen Zahlenwerte die typischen Radien von RR Lyr Sternen ab. (**3 Punkte**)

Lösung: Aufgrund des Stefan-Boltzmann Gesetzes ist die Leuchtkraft eines Sterns (**1 Punkt**)

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{\mathrm{SB}} T^4$$

Damit ergibt sich(**1 Punkt**)

$$\frac{L_{\mathrm{RR}}}{L_\odot} = \left(\frac{R_{\mathrm{RR}}}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{\mathrm{RR}}}{T_\odot}\right)^4$$

und damit (**1 Punkt**)

$$\frac{R_{\mathrm{RR}}}{R_\odot} = \left(\frac{L_{\mathrm{RR}}}{L_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{T_{\mathrm{RR}}}{T_\odot}\right)^{-2} = 48^{1/2} \cdot \left(\frac{7000}{6000}\right)^{-2} = 5.1$$

RR Lyr-Sterne haben also den fünffachen Sonnenradius.

c) i. Ermitteln Sie mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung die typische Leuchtkraft eines Sterns mit einer Masse von 5 $M_\odot$. (**3 Punkte**)

Lösung: Diese Punkte sind ein Geschenk. . . Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung ist

$$L = M^{3.3}$$

woraus sich eine Leuchtkraft von $L = 202\,L_\odot$ ergibt.

ii. Schätzen Sie die typische Verweildauer dieses Sterns auf der Hauptreihe ab, unter der Annahme, daß Hauptreihensterne 10% ihrer Masse in Helium fusionieren und daß der Stern zu 80% aus Wasserstoff besteht. (**3 Punkte**)

Lösung: Die für die Fusion zur Verfügung stehende Masse an Wasserstoff ist (**1 Punkt**)

$$M_{\text{fusion}} = 0.1 \cdot 0.8 \cdot 5 \cdot 2 \times 10^{30}\,\text{kg} = 8 \times 10^{29}\,\text{kg}$$

Da bei der Fusion von H zu He 0.7% der Ruhemasse in Energie konvertiert wird, ist die damit zur Verfügung stehende Energie(**1 Punkt**)

$$E_{\text{fusion}} = 7 \times 10^{-3} M_{\text{fusion}} c^2 = 7 \times 10^{-3} \cdot 8 \times 10^{29}\,\text{kg} \cdot 9 \times 10^{16}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2} = 5 \times 10^{44}\,\text{J}$$

Die Verweildauer auf der Hauptreihe ist damit ungefähr (**1 Punkt**)

$$t_{\text{MS}} = \frac{E_{\text{fusion}}}{L} = \frac{5 \times 10^{44}\,\text{J}}{202 \cdot 3.9 \times 10^{26}\,\text{J}\,\text{s}^{-1}} = 6 \times 10^{15}\,\text{s} = 2 \times 10^{8}\,\text{Jahre}$$

Dies ist deutlich kürzer als die Verweildauer der Sonne auf der Hauptreihe.