Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 3
J. Wilms/M. Kadler
11. November 2008

Frage 1: *Ellipseneigenschaften von Kreutz-Kometen*

a) Kreutz-Kometen stellen eine Untergruppe der sog. Sungrazer (wörtl. Sonnenkratzer) Kometen dar, die auf ihrer Bahn im Perihel der Sonne sehr nahe kommen. Die Kometen der Kreutz Gruppe gehen vermutlich alle auf einen sehr viel grösseren Kometen zurück, der beim Umlauf um die Sonne durch Gezeitenkräfte zerbrach.

   Der bekannteste Vertreter der Kreutz Gruppe ist der Komet Ikeya-Seki, der 1965 eine Helligkeit von -10^m erreichte und damit als dritthellstes Objekt am Himmel (nach Sonne und Mond) tagsüber deutlich neben der Sonne sichtbar war. Perihelabstand und Exzentrizität seiner Bahn betragen $d_{\mathrm{perihel}} = 0,008$ AE und $e = 0,99991$. Berechne die beiden Halbachsen a, b seiner Ellipsenbahn.

b) Wann wird der Komet Ikeya-Seki sein Perihel das nächste Mal erreichen.

Frage 2: *Geschwindigkeit auf Keplerbahn, Drehimpulserhaltung*

In der Vorlesung wurde demonstriert, dass das 2. Keplersche Gesetz eine unmittelbare Folge der Drehimpulserhaltung während der Bahnbewegung auf einer Keplerbahn ist. Es gilt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = const.$$

wobei dA/dt die Sektorgeschwindigkeit ist. dA ist dabei die Fläche, die vom Radiusvektor eines Planeten auf seiner Bahn während der Zeit dt überstrichen wird.

a) Zeige durch Integration von dA/dt über einen vollen Umlauf eines Planeten der Masse m um die Sonne mit der Periode P, dass der Drehimpuls pro Einheitsmasse gegeben ist durch

$$\frac{L}{m} = \frac{2\pi ab}{P} \quad .$$

   a und b sind die grosse und kleine Halbachse der Bahnellipse mit der Gesamtfläche $A = \pi ab$.

b) Zeige mithilfe obiger Gleichung für den Einheitsdrehimpuls, dass die Bahngeschwindigkeit im Perihel und im Aphel gegeben sind durch

$$v_{\mathrm{perihel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{und} \quad v_{\mathrm{aphel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad .$$

c) Bestimme Perihel- und Aphelgeschwindigkeit der Erde ($a_\oplus = 1$ AU, $e_\oplus = 0.017$, $P_\oplus = 365.26$ Tage), sowie des Kometen Ikeya-Seki mit den Bahnparameter-Werten aus Aufgabe 1.

Frage 3: *Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes für den Fall einer dominierenden Zentralmasse*

a) Auf der Erde beträgt die Länge eines Jahres 365.26 Tage. Berechne die Länge des Mars-Jahres aus dem 3. Keplerschen Gesetz. Die grosse Halbachse der Marsbahn beträgt $a_♂ = 1.524$ AU.

b) Die allgemeine Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes in Newtons Formulierung findet sich im WWW auf den Handouts zur Vorlesung. Hier soll eine vereinfachte Form dieses Gesetzes hergeleitet werden für den Spezialfall, dass eine der beiden beteiligten Massen sehr gross ist und das System dominiert ($m_1 \gg m_2$).

- Bestimme zunächst den Bahnradius der Sonne, der auf die Gravitationskraft Jupiters zurückgeht. Drücke diesen in Einheiten des Sonnenradius aus ($R_\odot = 700000\,\mathrm{km}$). Nimm den Jupiterorbit als kreisförmig an, mit einem Bahnradius von 5.2 AU bei einer Masse von 318 Erdmassen. Die Masse der Erde ist $m_\oplus = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Die Masse der Sonne beträgt $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Inwieweit ist demnach die Vereinfachung $M_\odot \gg m_2$ gültig für alle Massen m_2 im Sonnensystem?
- Nimm nun also an, dass der massive Zentralkörper stationär ist. Zeige, dass aus der Bedingung, dass die Gravitationskraft des zentralen Körpers auf den Planeten gleich der Zentripetalkraft auf der Planetenbahn ist, eine vereinfachte Form von Keplers 3. Gesetz abgeleitet werden kann.