Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I

Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 4 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
25. November 2008

Frage 1: *Die bewohnbare Zone*

In der Diskussion der Frage, ob es Leben in extrasolaren Planetensystemen gibt, ist üblicherweise eine der Grundannahmen, daß für die Existenz von Leben auf einem Planeten das Vorhandensein flüssigen Wassers eine Grundbedingung ist. Diese Annahme hat zum Konzept der "bewohnbaren Zone" in Sonnensystemen geführt. In dieser Frage werden wir dieses Konzept benutzen, um zu untersuchen, wo Leben in unserem eigenen Sonnensystem existieren kann. Dabei sollte allerdings bemerkt sein, daß das Konzept der bewohnbaren Zone innerhalb der Astrobiologie umstritten ist. Siehe zum Beispiel "What Does a Martian Look Like?: The Science of Extraterrestrial Life" von Jack Cohen und Ian Steward für eine gute Darstellung dieser Diskussion. Wir werden zudem in dieser Frage davon ausgehen, daß Wasser nur aufgrund von Sonnenstrahlung verflüssigt wird und andere Energiequellen, wie zum Beispiel die Heizung über Gezeitenkräfte im Fall des Mondes Europa vernachlässigen.

a) Wir betrachten einen kugelförmigen Planeten mit Radius r, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius d um einen Stern der Leuchtkraft L bewegt. Die Leuchtkraft ist die gesamte vom Stern abgestrahlte Leistung. Die Gesamtleistung, die zum Aufheizen der Planetenoberfläche zur Verfügung steht, ist die von der sonnenzugewandten Seite des Planeten aufgenommene Leistung, P_{tot}, abzüglich der Leistung, die durch Wolken in der Atmosphäre sofort wieder abgestrahlt wird. Diese Reflektivität wird die "Albedo", a, genannt. Die Albedo ist der Relativanteil der abgestrahlten Leistung, damit ist die auf der Planetenoberfläche eingestrahlte Leistung gegeben durch $P_{\text{abs}} = (1-a)P_{\text{tot}}$. Nimm an, daß die Atmosphäre des Planeten diesen gut genug isoliert, daß ein Temperaturgleichgewicht auf der Planetenoberfläche eintreten kann. Dieses wird erreicht, wenn die empfangene Gesamtleistung gleich der im Infraroten abgestrahlten Leistung ist.

   Leite eine Formel für die mittlere Planetentemperatur ab, indem Du die auf der sonnenzugewandten Seite des Planeten empfangene Leistung der von der ganzen Planetenoberfläche abgestrahlten Leistung gleichsetzt. Die pro Flächeneinheit von einem Körper der Temperatur T abgestrahlte Leistung ist dabei durch das Stefan-Boltzmann Gesetz gegeben durch

$$P_{\text{em}} = \epsilon\sigma_{\text{SB}}T^4$$

   wo die *Emissivität* ϵ ein Maß dafür ist, wie sehr das Spektrum des Körpers einem Schwarzen Körper genügt, und wo die Stefan-Boltzmann Konstante $\sigma_{\text{SB}} = 5.7\times10^{-8}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{K}^{-4}$.
   (*Antwort:* $T = \left\{((1-a)L)/(16\pi d^2\epsilon\sigma_{\text{SB}})\right\}^{1/4}$).

Lösung: To compute the total power received by the planet, we need to multiply the flux seen from the star as obtained by the inverse square law (the "solar constant"),

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{s1.1}$$

by the star-facing area of the planet, $A = \pi r^2$. Therefore, the power received by the planet is given by

$$P_{\text{tot}} = AF = \pi r^2 \cdot \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{Lr^2}{4d^2} \tag{s1.2}$$

Due to the planetary albedo, only the power $(1-a)P_{\text{tot}}$ can be used to heat the planet. As described in the question, to obtain temperature equilibrium, we need to set this power equal to the amount of radiation emitted by the planet:

$$P_{\text{abs}} = (1-a)P_{\text{tot}} = (1-a)\frac{Lr^2}{4d^2} \stackrel{!}{=} 4\pi r^2 \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 \tag{s1.3}$$

and solving for T gives the desired equation

$$T = \left(\frac{(1-a)L}{16\pi d^2 \epsilon \sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4} \tag{s1.4}$$

b) Benutze die obige Gleichung, um die mittlere Temperatur auf der Erdoberfläche zu berechnen ($d = 1\,\text{AU} = 150 \times 10^6\,\text{km}$), wobei $a_{\oplus} = 0.3$. Nimm an, daß die Erde wie ein Schwarzer Körper strahlt, d.h. $\epsilon = 1$. Gib die Temperatur sowohl in Kelvin als auch in Grad Celsius an. Die Sonnenleuchtkraft ist $L = 4 \times 10^{26}\,\text{W}$.

Lösung: Plugging in numbers gives

$$T = \left(\frac{(1-0.3)\cdot 4\times 10^{26}\,\text{W}}{16\pi \cdot 2.25\times 10^{22}\,\text{m}^2 \cdot 5.7\times 10^{-8}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{K}^{-4}}\right)^{1/4} = \left(4.33\times 10^9\,\text{K}^4\right)^{1/4} = 256\,\text{K} \tag{s1.5}$$

corresponding to $T = -17°\text{C}$.

c) Die Temperatur, die in der obigen Frage gefunden wurde, ist zu gering: Die mittlere Temperatur der Erdoberfläche ist wegen des Treibhauseffektes mit $+17°\text{C}$ deutlich höher. Hier wird ein Großteil der von der Erdoberfläche emittierten Infrarotstrahlung in der Atmosphäre wieder absorbiert, was die Atmosphäre heizt. Aus Symmetriegründen wird nur die Hälfte der von der Atmosphäre abgestrahlten Leistung in den Weltraum abgestrahlt, der Rest verbleibt auf der Erde und heizt diese Auf. Wir können den Treibhauseffekt der Einfachheit halber modellieren, indem wir $\epsilon = 0.6$ setzen. Das ergibt eine vorhergesagte Temperatur von 19°C.

Auf der Erde wird Leben in Regionen mit mittleren Temperaturen zwischen $-10°\text{C}$ und $+30°\text{C}$ beobachtet. Wir können diesen Temperaturbereich benutzen, um die "bewohnbare Zone" unseres Sonnensystems zu definieren. Um unsere Abschätzung realistischer zu gestalten, sollte festgehalten werden, daß es 4.6 Milliarden Jahre brauchte, bis sich intelligentes Leben auf der Erde entwickelt hatte. Während dieses Zeitraums erhöhte sich die Sonnenleuchtkraft um ungefähr 30%. Benutze diese Information, um den inneren und äußeren Radius der bewohnbaren Zone um die Sonne auszurechnen. Was ist die maximale Exzentrizität, die ein Planet haben kann, um immer innerhalb der bewohnbaren Zone zu sein? Nimm an, daß der Treibhauseffekt während dieses Zeitraumes konstant war (Achtung: das ist *nicht* korrekt; die jetzige Zusammensetzung der Erdatmosphäre ist das Resultat, daß Leben die Atmosphäre und damit den Treibhauseffekt geändert haben!).

Lösung: To answer this question we have to compute the inner and outer radii of the habitable zone today and 4.6 billion years ago. First solve Eq. (s1.4) for d (**1 Punkt**):

$$d = \left(\frac{(1-a)L}{16\pi \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4}\right)^{1/2} \tag{s1.6}$$

The habitable zone is defined as the range of radii where the temperature is between $T_{\text{min}} = -10°\text{C} = 263\,\text{K}$ and $T_{\text{max}} = +30°\text{C} = 303\,\text{K}$. Computing the current outer radius of the habitable zone gives

$$d_{\text{out, today}} = \left(\frac{(1-0.3)\cdot 4\times 10^{26}\,\text{W}}{16\pi \cdot 0.6 \cdot 5.7\times 10^{-8}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{K}^{-4} \cdot 4.78\times 10^9\,\text{K}^4}\right)^{1/2} = 1.85\times 10^{11}\,\text{m} = 1.23\,\text{AU} \tag{s1.7}$$

Similarly we obtain $d_{\text{in, today}} = 1.39 \times 10^{11}$ m = 0.93 AU. Since starting on the main sequence, the solar luminosity increased by 30%, such that its luminosity at the beginning of the main sequence phase was $L = 4 \times 10^{26}\,\text{W}/1.3 = 3.08 \times 10^{26}\,\text{W}$. Plugging this into the above equations gives $d_{\text{out,past}} = 1.62 \times 10^{11}\,\text{m} = 1.08\,\text{AU}$ and $d_{\text{in,past}} = 1.22 \times 10^{11}\,\text{m} = 0.81\,\text{AU}$ (**2 Punkte** for the four values, one of these marks for showing how the units were obtained). In other words, the range of distances from the Sun that was part of the habitable zone from 4.6 billion years ago until today ranges from 0.93 AU to 1.08 AU, corresponding to the perihelion and aphelion distances of the planet with the largest eccentricity that has always remained within the habitable zone. Remembering the equations for the perihelion and aphelion,

$$d_{\text{perihelion}} = a(1 - e) \quad \text{and} \quad d_{\text{aphelion}} = a(1 + e) \tag{s1.8}$$

gives

$$\frac{d_{\text{perihelion}}}{d_{\text{aphelion}}} = \frac{1 - e}{1 + e} \tag{s1.9}$$

and therefore (**1 Punkt**)

$$e = \frac{d_{\text{aphelion}} - d_{\text{perihelion}}}{d_{\text{aphelion}} + d_{\text{perihelion}}} = \frac{1.08\,\text{AU} - 0.93\,\text{AU}}{1.08\,\text{AU} + 0.93\,\text{AU}} = 0.07 \tag{s1.10}$$

This result means that because of the evolution of stars on the main sequence and because of the timescale for the evolution of life, a planet has to be in a virtually circular orbit to stay within the habitable zone throughout the main sequence stage of its star. (*N.B.* One can show that the presence of Jupiter like planets on circular orbits with rather large semi-major axes will lead to a circularisation of the planetary orbits during the early stages of the evolution of a planetary system. Thus, we owe at least some of our existence to Jupiter's presence.)