Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I

Sommersemester 2011
Beispielklausur – Musterlösung

Allgemeine Regeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt *eine Stunde* (60 Minuten).
- Außer eines Taschenrechners sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- *Beide Fragen sind zu bearbeiten.*
- Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt **50 Punkte**.

Nützliche Konstanten

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Jahreslänge	$1\,\mathrm{Jahr} = 365.25\,\mathrm{Tage}$
Tageslänge	$1\,\mathrm{Tag} = 86400\,\mathrm{s}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Erdmasse	$M_\oplus = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Frage 1: *Sonnensystem*

a) Komet Wild 2 hat eine Perihelentfernung von 1.583 AU

i. Die Exzentrizität der Bahn ist $e = 0.540$. Berechnen Sie die große und kleine Halbachsen der Bahn. (**3 Punkte**)

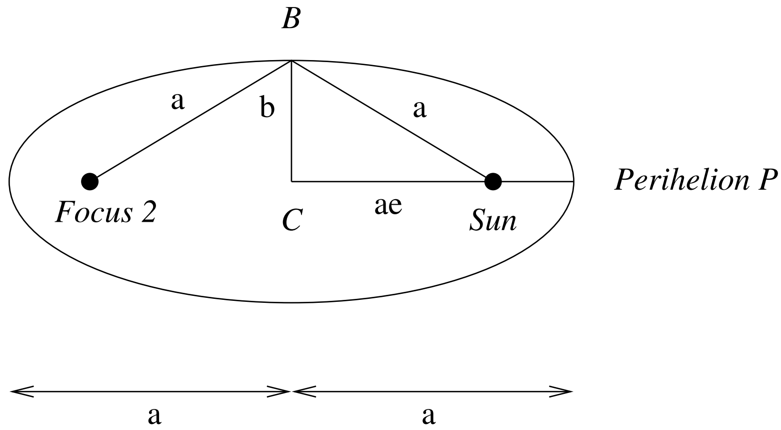
Lösung: Die Perihelentfernung ist

$$d_{\mathrm{per}} = a(1-e)$$

so daß die große Halbachse gegeben ist als (**1 Punkt**)

$$a = d/(1-e) = 3.441\,\mathrm{AU}$$

Die Formel für die kleine Halbachse kann aus der Definition einer Ellipse erhalten werden. Da in einer Ellipse die Summe der Entfernungen von beiden Brennpunkten zu einem Punkt auf der Ellipse gleich $2a$ ist, gilt die folgende Abbildung:



Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck C–Sonne–B gilt dann (**2 Punkte**)

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 2.87\ \mathrm{AU}$$

ii. Bestimmen Sie die Bahnperiode des Kometen. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Bahnperiode folgt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz. Für das Sonnensystem ist dieses (**1 Punkt**).

$$\frac{P_{\mathrm{Earth}}^2}{a_{\mathrm{Earth}}^3} = \frac{P_{\mathrm{comet}}^2}{a_{\mathrm{comet}}^3}$$

Wird die Periode P in Jahren und die große Halbachse a in AU gemessen, dann ist das Verhältnis gleich 1, so daß (**1 Punkt**)

$$P = a^{3/2} = 6.38\ \mathrm{Jahre}$$

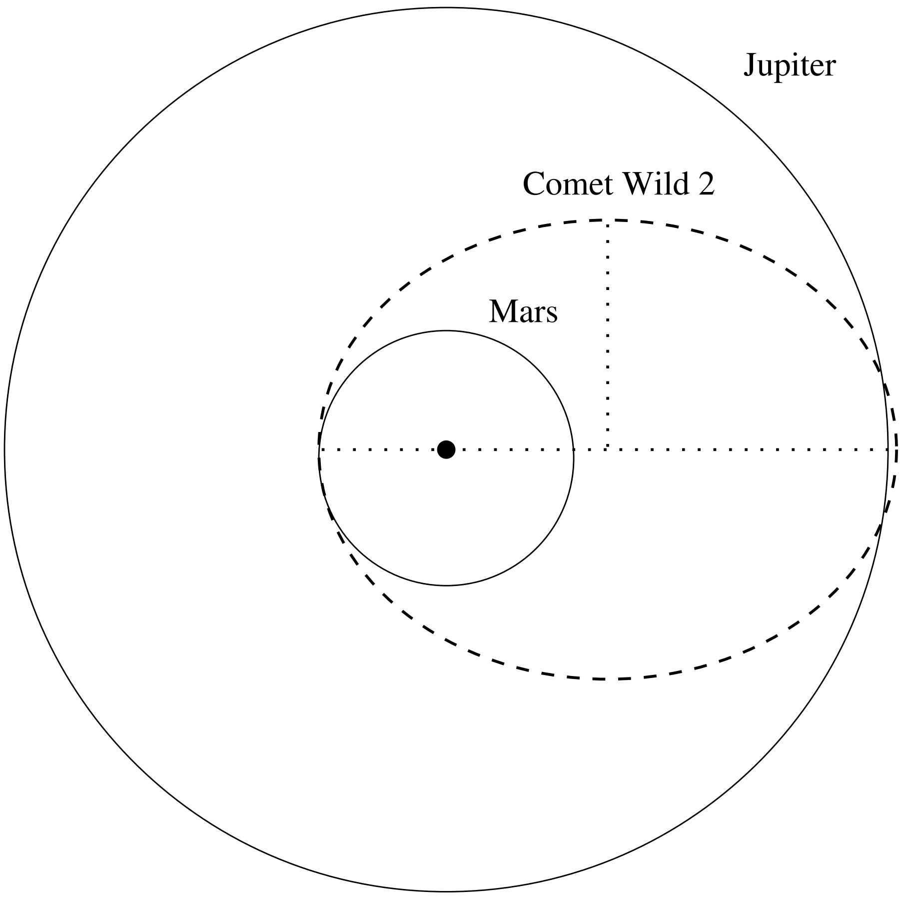
iii. Berechnen Sie die Aphel-Entfernung von Wild 2. (**1 Punkt**)

Lösung: Die Aphel-Entfernung ist (**1 Punkt**)

$$d_{\mathrm{aphelion}} = a(1 + e) = 5.3\ \mathrm{AU}$$

iv. Skizzieren Sie die Bahnen von Wild 2, Mars und Jupiter. Sie können annehmen, daß die Jupiter- und Marsbahnen kreisförmig sind. Die Bahnperiode von Mars ist $P_{♂} = 1.88$ Jahre, die des Jupiter beträgt $P_{♃} = 11.86$ Jahre. (**5 Punkte**)

Lösung: Mit der gegebenen Information für Mars und Jupiter können ihre Bahnradien mit Hilfe des 3. Kepler'schen Gesetzes erhalten werden: $a_{♂} = 1.523$ AU und $a_{♃} = 5.2$ AU (**2 Punkte**). Diese werte sind *sehr* nahe zu den Perihel- und Aphel-Entfernungen der Kometen, so daß die Zeichnung der Bahn prinzipiell sehr einfach ist, wenn noch der oben gefundene Wert für die kleine Halbachse berücksichtigt wird (**3 Punkte**):



b) Die Jupitermonde umkreisen den Planeten auf Kreisbahnen. Die Bahnperiode von Europa beträgt $P_{\text{Europa}} = 3.55$ Tage und ihre Halbachse ist $a_{\text{Europa}} = 671000\,\text{km}$. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Masse des Jupiter und geben Sie diese in kg und in Erdmassen an. Welche Annahme benutzen Sie? (**6 Punkte**)

Lösung: Die korrekte Beantwortung dieser Frage setzt die Kenntnis der physikalischen Form von Keplers 3. Gesetz voraus (**1 Punkt**):

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{\text{J}} + m_{\text{E}})}$$

wo m_{J} und M_{E} die Massen von Jupiter und Europa sind und wo a der Radius der Europa-Bahn ist. Wir müssen dabei annehmen, daß $m_{\text{E}} \ll m_{\text{J}}$ (**2 Punkte**), was mit Ausnahme des Erde-Mond-Systems eine gute Annahme ist. Daher ist (**1 Punkt**)

$$m_{\text{J}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2}$$

mit

$$a = 671000\,\text{km} = 6.71 \times 10^8\,\text{m}$$
$$P = 3.55\,\text{Tagen} = 306720\,\text{s}$$

ergibt sich die Jupitermasse zu (**2 Punkte**)

$$m_{\text{J}} = \frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}} \cdot \frac{3.02 \times 10^{26}\,\text{m}^3}{9.41 \times 10^{10}\,\text{s}^2} = 1.9 \times 10^{27}\,\text{kg} = 317\,M_{\oplus}$$

(der korrekte Wert, der mit einer genaueren Methode erhalten wurde, ist 318 $M_{\oplus}$)

c) Asteroiden und Kometen sind kleine Körper des Sonnensystems.

i) Vergleichen Sie Größe, Aufbau und Zusammensetzung von Asteroiden mit denen der Kometen (**2 Punkte**)

Lösung: Komet = schmutziger Schneeball, wenige km groß(**1 Punkt**), Asteroid=Gesteinsbrocken, 100m – 500km groß (**1 Punkt**)

ii) Wo vermutet man den Ursprungsort der langperiodischen Kometen? Wo den der kurzperiodischen (<200 Jahre) Kometen? Fertigen Sie eine Skizze an. (**6 Punkte**)

Lösung: Langperiodische: Oortsche Wolke, Kugelförmig um das Planetensystem, Radius 40000 AU(**2 Punkte**)
Periodische: Kuiperbelt jenseits der Neptunbahn in der Ekliptik (mehr oder weniger)(**2 Punkte**). Skizze: (**2 Punkte**)

Frage 2: *Sterne*

a) Doppelsterne

i. Beschreiben Sie stichwortartig die beiden Hauptklassen von Doppelsternen. (**4 Punkte**)

Lösung: Visuelle Doppelsterne=Trennbar im Teleskop, elliptische Bahnform(**2 Punkte**) und spektroskopische Doppelsterne=Nachweis durch Spektroskopie: doppellinige Spektren, periodische Variation der Spektrallinien hervorgerufen durch Dopperedfekt. (**2 Punkte**)

ii. Geben Sie zwei Methoden zum Nachweis eines unsichtbaren Begleiters an (**2 Punkte**).

Lösung: Periodische Schwankung der Eigenbewegung (**1 Punkt**) oder periodische Änderung der Radialgeschwindigkeit (bei spektroskopischen Doppelsternen) des sichtbaren Sterns. (**1 Punkt**)

iii. Welche stellaren Zustandsgrößen lassen sich bei bedeckungsveränderlichen Doppelsternen bestimmen? (**2 Punkte**)

Lösung: Masse(**1 Punkt**) und Radius(**1 Punkt**).

b) Die Solarkonstante, d.h. der durch eine Kugel mit Radius 1 AU fliessende Strahlungsfluß beträgt $F = 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

i. Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Leuchtkraft der Sonne. (**3 Punkte**)

Lösung: Unter Benutzung von (**1 Punkt**)

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

ergibt sich die Sonnenleuchtkraft, L, zu (**2 Punkte**)

$$L = 4\pi r^2 F = 4\pi \cdot 2.25 \times 10^{22}\,\mathrm{m^2} \cdot 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}} = 3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$$

ii. Von der Erde aus betrachtet hat die Sonne einen Winkeldurchmesser von 0.5°. Bestimmen Sie daraus den Durchmesser der Sonne in km. Welche Näherung können Sie machen? (**2 Punkte**)

Lösung: Der Winkeldurchmesser der Sonne in Radian ist (**1 Punkt**)

$$\alpha = 0.5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 8.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

Daher ist der Sonnendurchmesser gegeben durch (**1 Punkt**)

$$D = \alpha r = 8.7 \times 10^{-3} \cdot 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$$

(N.B. Beachte, daß hier aufgrund der kleinen Winkel *keine* Trigonometrie notwendig ist!)

iii. Bestimmen Sie mit Hilfe des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes die Oberflächentemperatur der Sonne. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Oberflächentemperatur der Sonne ist (**2 Punkte**)

$$T = \left(\frac{L}{4\pi R^2\,\sigma_{\rm SB}}\right)^{1/4} = \left(\frac{3.9\times10^{26}\,\rm W}{4\times3.1414\times4.9\,10^{17}\rm m^2\,5.7\times10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4}}\right)^{1/4} = 5774\,\rm K$$

(**1 Punkt**)

c) Die absolute Helligkeit von RR Lyrae-Sternen beträgt $M_{\rm RR} = 0.6\,\rm mag$

i. In einem Kugelsternhaufen werden RR Lyr-Sterne mit einer scheinbaren Helligkeit von $m = 17\,\rm mag$ beobachtet. Geben Sie das Entfernungsmodul des Kugelsternhaufens an und berechnen Sie seine Entfernung in Parsec und Lichtjahren. Sie können annehmen, daß der Durchmesser des Kugelsternhaufens klein ist gegenüber seiner Entfernung. (**3 Punkte**)

Lösung: Das Entfernungsmodul ist (**1 Punkt**)

$$\mathrm{DM} = m - M = 17\,\rm mag - 0.6\,mag = 16.4\,mag$$

Da

$$m - M = 5\log D - 5$$

wo m und M die scheinbare und absolute Magnituden eines Sterns sind und wo D seine Entfernung in Parsec ist. Daher ist (**2 Punkte**)

$$D = 10^{(m-M)/5+1} = 19000\,\rm pc = 62000\,ly$$

da $1\,\rm pc = 3.26\,ly$.

ii. Berechnen Sie die Leuchtkraft der RR Lyr-Sterne in Einheiten der Sonnenleuchtkraft. Die absolute Helligkeit der Sonne beträgt 4.8 mag. (**2 Punkte**)

Lösung: Die Beziehung zwischen den Magnituden und Flüssen zweier Sterne ist (**1 Punkt**)

$$m_2 - m_1 = 2.5\log(F_1/F_2)$$

Da $F = L/4\pi d^2$ ergibt sich die Beziehung zwischen den absoluten Magnituden und den Leuchtkräften von Sonne und einem RR Lyrae Stern zu

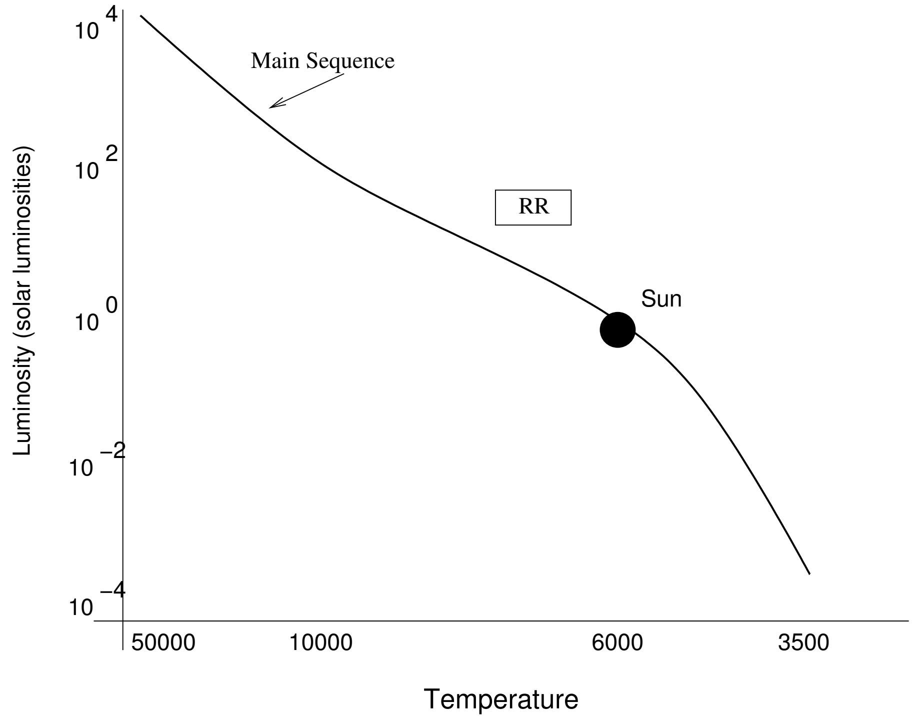
$$M_\odot - M_{\rm RR} = 2.5\log(L_{\rm RR}/L_\odot)$$

so daß (**1 Punkt**)

$$\frac{L_{\rm RR}}{L_\odot} = 10^{(M_\odot - M_{\rm RR})/2.5} = 48$$

iii. Zeichnen Sie in ein physikalisches Hertzsprung-Russell-Diagramm ($T_{\rm eff}$, L) die Lage der Hauptreihe, der Sonne und der RR Lyr-Sterne ein (letztere haben $T \sim 7000\,\rm K$). Achten Sie auf die Achsenbeschriftung und geben Sie die Wertebereiche an. (**4 Punkte**)

Lösung: Ein mögliches HRD ist



Wichtig sind die korrekte Achsenbeschriftung, einschließlich der ungefähren Leuchtkraft- und Temperaturbereiche, die Position der Sonne und der Hauptreihe und die Feststellung, daß RR Lyr-Sterne nicht auf der Hauptreihe liegen können.

(**4 Punkte**)

iv. Ein sonnenähnlicher Stern (gleiche absolute Helligkeit wie die Sonne) und ein RR Lyr-Stern befinden sich in einem Doppelsternsystem. Was ist die absolute Helligkeit des Gesamtsystems? (**2 Punkte**)

Lösung: Aus der Definition der Magnitude ergibt sich (**1 Punkt**)

$$\frac{I_1}{I_c} = 10^{-\frac{2}{5}(m_1 - m_c)} \tag{s2.1}$$

wo m_c die Magnitude und I_c Intensität eines Vergleichssterns sind.

$$\frac{I_1 + I_2}{I_c} = 10^{-\frac{2}{5}(m_1 - m_c)} + 10^{-\frac{2}{5}(m_2 - m_c)} \tag{s2.2}$$

Sei obdA $m_c = 0\,\mathrm{mag}$. Dann ist

$$\frac{I_1 + I_2}{I_c} = 10^{-\frac{2}{5}m_1} + 10^{-\frac{2}{5}m_2} \tag{s2.3}$$

und damit(**1 Punkt**)

$$m_{\mathrm{tot}} = -2.5 \log\left(10^{-\frac{2}{5}m_1} + 10^{-\frac{2}{5}m_2}\right) = 0.58\,\mathrm{mag} \tag{s2.4}$$