

*Berechnung des emittierten
Spektrums*

5. Berechnung des emittierten Spektrums

5.1 Spektrallinien

Jedes Volumenelement emittiert pro Zeiteinheit und Raumwinkelement die Energie j_ν :

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_{up} A_{up \rightarrow low}$$

mit $h\nu = E_{up} - E_{low}$

n_{up} = Besetzungsdichte des oberen Niveaus [cm^{-3}]

$A_{up \rightarrow low}$ = Übergangswahrscheinlichkeit
(Einstein Koeffizient)

→ Problem besteht in Bestimmung von n_{up}

a) Emission stoßangeregter Linien (verbotene Linien, UV-Resonanzlinien):

Bilanzgleichungen für 2 bis 5 Niveaus (s. Kapitel 4)

b) Rekombinationslinien (H-, He-Linien):

Bilanzgleichung für ∞ -viele Niveaus

Für jede HI, HeII-Linie ($n \rightarrow n'$):

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{l'=l \pm 1} n_{nl} A_{nl \rightarrow n'l'}$$

wg. Entartung

Rekombinationsspektrum, HI

Photoionisationsgleichgewicht liefert Besetzungsdichte des Grundzustandes (stark überbesetzt)

Für höhere Niveaus: Photoionisation unwichtig
statistisches Gleichgewicht für Niveau n, l ($n \geq 2$)

Gewinn = Verlust

Gewinn: $n_e n_p \alpha_{nl}(T) + \sum_{n' > n} \sum_{l'} n_{n'l'} A_{n'l', nl}$

= $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rekombination direkt ins Niveau } nl} + \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Übergänge von höheren Niveaus } n'l'}$

Verlust: $n_{nl} \cdot \sum_{n''=n_0}^{n-1} \sum_{l''} A_{nl, n''l''}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Übergänge zu tieferen Niveaus}}$

$n_0 = 1$ Ly-Linien optisch dünn (FALL A)
 $n_0 = 2$ Ly-Linien opt. dick (FALL B)

typisch: $\tau(\text{Ly}\alpha) = 10^4 \tau_{\nu_0} \dots \tau(\text{Ly}18) = 10 \tau_{\nu_0}$

\Rightarrow häufige Streuung \Rightarrow Zerstörung d. Ly-Linienphotonen
 (z.B. \rightarrow Balmerphotonen, 2-Phot.-Kontinuum)

- n_{nl} ausdrücken durch departure-Koeffizienten:

$$n_{nl} = b_{nl} \underbrace{(2l+1) \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{X_n / kT}}_{\text{Kombinierte Saha-Boltzmann-Gleichung (s. 2.3)}} \cdot n_e \cdot n_p$$

\nearrow departure-Koeffizient

\nearrow Ionisierungsenergie von n

Einsetzen in Gleichgewichtsbedingung

$$n_e n_p \alpha_{nl} + \sum_{n' > n} \sum_{l'} b_{n'l'} A_{n'l',nl} (2l'+1) \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{X_{n'}/kT} n_e n_p$$

$$= b_{nl} (2l+1) \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{X_n/kT} \sum_{n''=n_0}^{n-1} \sum_{l''} A_{nl, n''l''} n_e n_p$$

multiplizieren mit $\left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{e^{-X_n/kT}}{2l+1}$:

$$\frac{\alpha_{nl}}{2l+1} \cdot \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-X_n/kT} + \sum_{n' > n} \sum_{l'} \frac{b_{n'l'} (2l'+1)}{2l+1} e^{(X_{n'} - X_n)/kT} \cdot A_{n'l',nl}$$

$$= b_{nl} \sum_{n''=n_0}^{n-1} \sum_{l''} A_{nl, n''l''} \quad (\text{eine solche Gleichung für jedes Niveau } nl)$$

→ unendliches Gleichungssystem für die b 's

Unrealistisch (nur radiative Prozesse berücksichtigt)

Protonenstöße: $nl \rightarrow nl \pm 1$

Elektronenstöße: $n \rightarrow n \pm 1$ ($n > 1$)

Ionisation durch Elektronenstoß:

(Umkehrprozess: 3-Körper-Rekombination)



Idee für die nächsten Schritte zur Berechnung der Besetzungszahlen n_{nl} (bzw. der departures b_{nl}) für alle Niveaus nl im H-Atom (Folien 5.4-5.7):

- lineares Gleichungssystem, 1 Gleichung für jedes Niveau
 $\Rightarrow \infty$ Gleichungen
- Abhilfe: oberhalb eines „Kritischen“ Niveaus dominieren (Elektronen-) Stöße; Gleichungssystem bis dahin hinschreiben & lösen.

Für Niveaus darüber:

- Herleitung einer Differentialgleichung, die die b_n liefert (5.5)
- Bestimmung des Kritischen Niveaus (5.6)
- weitere Vereinfachung möglich:
 - l -Aufspaltung für hohe Niveaus muß nicht explizit berücksichtigt werden, da (Protonen-) Stöße für eine LTE-Verteilung sorgen:
 - alle Niveaus l mit gleichem n haben gleiche b_{nl} -Faktoren (5.4)

a) Protonenstöße, effizientester dieser 3 Mechanismen :

Stoßübergangswahrscheinlichkeit : $C_{nl, n'l \pm 1} = n_p g_{nl, n'l \pm 1}$

$n_p =$ Protonendichte

$C_{nl, n'l \pm 1}$ wächst mit steigendem n an :

→ Stöße dominieren die Besetzung der Unterniveaus für $n > n_{cl}$ ← "critical l "

Beispiel : $T_e = 10\,000\text{ K}$ $n_p = 10^4\text{ cm}^{-3}$: $n_{cl} = 15$

⇒ LTE - Besetzungsverhältnis der l -Niveaus untereinander für $n > n_{cl}$:

Boltzmann :
$$\frac{n_{nl}}{n_{n'l'}} = \frac{2l+1}{2l'+1} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = \frac{2l+1}{2l'+1}$$
 $\ll 1$

⇒ $n_{nl} = \frac{2l+1}{n^2} n_n$ mit $n_n := \sum_{l=0}^{l-1} n_{nl}$

⇒ $b_{nl} = b_n$

Departure-Koeffizient unabhängig von l

n_{cl} ist dichteabhängig : $n_p = 100\text{ cm}^{-3} \rightarrow n_{cl} = 30$
 $n_p = 1\text{ cm}^{-3} \rightarrow n_{cl} = 45$

Sternatmosphäre oder Laborplasma : $n_{cl} = 1$!

Für Hauptquantenzahlen $n > n_{cl}$ vereinfacht sich damit das statistische Gleichgewicht (s. 5.2) →

$$n_e n_p \alpha_n + \sum_{n'=n+1}^{\infty} n_{n'} A_{n',n} = n_n \sum_{n''=n_0}^{n-1} A_{n,n''}$$

Rek.
Linien „von oben“
Linien „nach unten“
Gewinn = Verlust des Niveaus n

b) e^- -Stöße zu Nachbarniveaus ($n \rightarrow n \pm 1$) und

e^- -Stoßionisation (Seaton 1964, MNRAS 127, 177). Erweiterung von ↗ :

$$n_e n_p (\alpha_n + C_{i,n}) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} n_{n'} A_{n',n} + n_{n+1} C_{n+1,n} + n_{n-1} C_{n-1,n}$$

Rekomb.
Stöße „von oben“
„von unten“
nur Stöße von benachbarten Niveaus wichtig

$$= n_n \sum_{n''=0}^{n-1} A_{n,n''} + n_n (C_{n,i} + C_{n,n+1} + C_{n,n-1})$$

Ionisation
Anregung
Abregung

aufgrund des detaillierten Gleichgewichts gilt:

$$C_{n,n'} = C_{n',n} \cdot \frac{g_{n'}}{g_n} e^{-(X_n - X_{n'})/kT} \quad (\text{s. S. 4.8})$$

$$C_{i,n} = C_{n,i} \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{3/2} \frac{g_n}{z} e^{X_n/kT}$$

wiederum ausgedrückt durch b_n : (analog zu Gl. auf S. 5.3) ...

$$\frac{z}{g_n} e^{-X_n/kT} \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{-3/2} \alpha_n + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \frac{g_{n'}}{g_n} e^{-(X_n - X_{n'})/kT} b_{n'} A_{n',n}$$

$$- \left(A_n b_n + C_{n,i} (1 - b_n) + C_{n,n+1} (b_{n+1} - b_n) - C_{n,n-1} (b_n - b_{n-1}) \right) = 0$$

$\rightarrow := \sum_{n'=n_0}^{n-1} A_{n,n'}$

$$C_{n,n+1} \left[(b_{n+1} - b_n) - (b_n - b_{n-1}) \right] + (C_{n,n+1} - C_{n,n-1}) (b_n - b_{n-1})$$

\downarrow $\frac{d^2 b_n}{dn^2}$
 \downarrow $\frac{db_n}{dn}$

$n \gg 1$: D.Gl. für b_n

Berechnung des Kritischen Niveaus (d.h.: ab wann dominieren, Stöße?)

5.6

Elektronen -

→ Stoßanregung

$$(1) \frac{C_{n,n+1}}{A_n} = \frac{1.07 \cdot 10^{-13} n^9 \ln(0.0471 n)}{3 \ln n - 0.985}$$

→ Stoßionisation

$$(2) \frac{C_{n,i}}{A_n} = \frac{4.38 \cdot 10^{-13} n^7}{3 \ln n - 0.985}$$

} $T = n_e = 10^4$

folgt aus $C_{n,i} = 4.38 \cdot 10^{-13} n^2 \cdot 7.87 \cdot 10^9$

(Thomson Klass. Theorie für Stoßionisation, hier auch für Anregung, n groß)

⇒ Kritische Niveaus mit $\frac{C_{n,n+1}}{A_n} > 1$ für $n > n_c^1$

bzw. $\frac{C_{n,i}}{A_n} > 1$ $n > n_c^2$

Beispiel: $T = 10^4 \text{ K}$, $n_e = 10^4 \text{ cm}^{-3}$: $n_c^1 = 38$ $n_c^2 = 82$

⇒ $b_n \rightarrow 1$ für $n \gg n_c^1$

$[0.7 \leq b_n \leq 1$ für $n > n_c^1$ (s.u.)]

Zur Lösung der D.Gl. brauchen wir noch den Wert des „Kaskadenterms“ (unendliche Summe in D.Gl.):

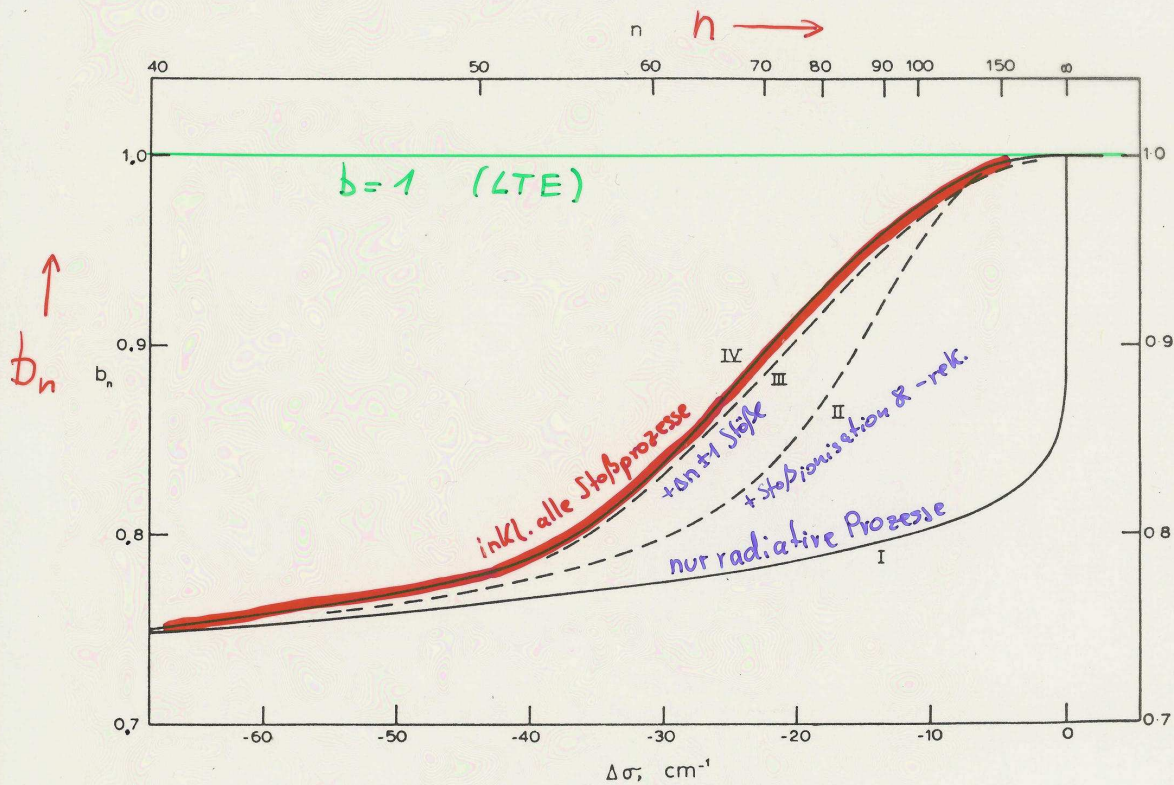
Näherung $b_n = 1$ für sehr großes n , und

Näherung der Summe durch ein Integral:

$$\sum_{n'=n+1}^{\infty} \frac{g_{n'}}{g_n} e^{-(\chi_n - \chi_{n'})/kT} \underset{=1}{b_{n'}} A_{n'n} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{g(n')}{g(n)} e^{-(\chi_n - \chi_{n'})/kT} A_{n'n} dn'$$

Integral kann analytisch ausgewertet werden (für H)

Resultate: Lösung der Differentialgleichung $\rightarrow b_n(n)$



Kurve I: nur radiative Prozesse

II: rad. Prozesse + Stoßionisation u. -rekombination

III: " + $\Delta n = \pm 1$ Stöße

IV: " + alle Stoßprozesse

zum Vergleich: Atmosphären von O-Sternen

$$b_n \approx 1 \text{ für } n \geq 10$$

\Rightarrow extremes non-LTE in Gasnebeln

Bestimmung der Besetzungsdichten:

$n > n_c^1$: Differentialgleichung für b_n

$n \leq n_c^1$: lineares Gleichungssystem für b_n
(n_c^1 Gleichungen)

nach Bestimmung der Besetzungszahlen :

Emission eines Volumenelements (Energie / Zeit / Raumwinkel)

in einer Spektrallinie $up \rightarrow low$:

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_{up} \cdot A_{up \rightarrow low}$$

$j_\nu = \text{Fkt.}(n_e, n_p, T)$ und Unterscheidung Fälle A/B

→ Tabellen, üblich: Emission relativ zu $H\beta$ $j_\nu / j_{\nu_{H\beta}}$

Beispiel: HI, Fall B

TABLE 4.4
H I recombination lines (Case B)

	T											
	5000° K				10,000° K				20,000° K			
	10 ²	10 ⁴	10 ²	10 ⁴	10 ²	10 ⁴	10 ⁶	10 ⁴	10 ²	10 ⁴	10 ²	10 ⁴
N_e (cm ⁻³)	2.20 × 10 ⁻²⁵	2.22 × 10 ⁻²⁵	1.24 × 10 ⁻²⁵	1.24 × 10 ⁻²⁵	1.24 × 10 ⁻²⁵	1.24 × 10 ⁻²⁵	1.25 × 10 ⁻²⁵	1.25 × 10 ⁻²⁵	0.658 × 10 ⁻²⁵	0.658 × 10 ⁻²⁵	0.659 × 10 ⁻²⁵	0.659 × 10 ⁻²⁵
$4\pi j_{H\beta}/N_p H_e$ (erg cm ³ sec ⁻¹)	5.38 × 10 ⁻¹⁴	5.44 × 10 ⁻¹⁴	3.02 × 10 ⁻¹⁴	3.03 × 10 ⁻¹⁴	3.02 × 10 ⁻¹⁴	3.03 × 10 ⁻¹⁴	3.07 × 10 ⁻¹⁴	3.07 × 10 ⁻¹⁴	1.61 × 10 ⁻¹⁴	1.61 × 10 ⁻¹⁴	1.61 × 10 ⁻¹⁴	1.61 × 10 ⁻¹⁴
$\alpha_{H\beta}^{e,j}$ (cm ³ sec ⁻¹)												
Balmer-line intensities relative to H β												
$j_{H\alpha}/j_{H\beta}$	3.04	3.00	2.86	2.85	2.86	2.85	2.81	2.81	2.75	2.75	2.74	2.74
$j_{H\gamma}/j_{H\beta}$	0.458	0.460	0.468	0.469	0.468	0.469	0.471	0.471	0.475	0.475	0.476	0.476
$j_{H\delta}/j_{H\beta}$	0.251	0.253	0.259	0.260	0.259	0.260	0.262	0.262	0.264	0.264	0.264	0.264
$j_{H\epsilon}/j_{H\beta}$	0.154	0.155	0.159	0.159	0.159	0.159	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163
$j_{H\zeta}/j_{H\beta}$	0.102	0.102	0.105	0.105	0.105	0.105	0.110	0.110	0.107	0.107	0.107	0.107
$j_{H\eta}/j_{H\beta}$	0.0709	0.0714	0.0731	0.0734	0.0731	0.0734	0.0786	0.0786	0.0746	0.0746	0.0746	0.0746
$j_{H\theta}/j_{H\beta}$	0.0515	0.0520	0.0530	0.0533	0.0530	0.0533	0.0590	0.0590	0.0540	0.0540	0.0541	0.0541
$j_{H\iota}/j_{H\beta}$	0.0153	0.0163	0.0156	0.0162	0.0156	0.0162	0.0214	0.0214	0.0158	0.0158	0.0161	0.0161
$j_{H\kappa}/j_{H\beta}$	0.0066	0.0082	0.0066	0.0075	0.0066	0.0075	0.0105	0.0105	0.0066	0.0066	0.0072	0.0072
Paschen-line intensities relative to corresponding Balmer lines												
$j_{P\alpha}/j_{H\beta}$	0.410	0.396	0.338	0.332	0.338	0.332	0.317	0.317	0.284	0.284	0.281	0.281
$j_{P\beta}/j_{H\gamma}$	0.402	0.396	0.348	0.345	0.348	0.345	0.335	0.335	0.305	0.305	0.305	0.305
$j_{P\gamma}/j_{H\delta}$	0.393	0.388	0.349	0.346	0.349	0.346	0.339	0.339	0.312	0.312	0.311	0.311
$j_{P\delta}/j_{H\epsilon}$	0.382	0.381	0.348	0.348	0.348	0.348	0.333	0.333	0.317	0.317	0.316	0.316
$j_{P\epsilon}/j_{H\zeta}$	0.379	0.377	0.347	0.345	0.347	0.345	0.325	0.325	0.318	0.318	0.316	0.316
$j_{P\zeta}/j_{H\eta}$	0.375	0.363	0.347	0.339	0.347	0.339	0.313	0.313	0.319	0.319	0.315	0.315
$j_{P\eta}/j_{H\theta}$	0.371	0.346	0.346	0.327	0.346	0.327	0.309	0.309	0.320	0.320	0.309	0.309
Brackett-line intensities relative to corresponding Balmer lines												
$j_{B\alpha}/j_{H\gamma}$	0.227	0.215	0.171	0.166	0.171	0.166	0.154	0.154	0.132	0.132	0.127	0.127
$j_{B\beta}/j_{H\delta}$	0.222	0.214	0.175	0.172	0.175	0.172	0.163	0.163	0.141	0.141	0.140	0.140
$j_{B\gamma}/j_{H\epsilon}$	0.214	0.209	0.175	0.173	0.175	0.173	0.163	0.163	0.144	0.144	0.143	0.143
$j_{B\delta}/j_{H\zeta}$	0.209	0.206	0.174	0.172	0.174	0.172	0.160	0.160	0.146	0.146	0.145	0.145
$j_{B\epsilon}/j_{H\eta}$	0.204	0.200	0.172	0.170	0.172	0.170	0.152	0.152	0.146	0.146	0.146	0.146
$j_{B\zeta}/j_{H\theta}$	0.197	0.186	0.170	0.164	0.170	0.164	0.137	0.137	0.147	0.147	0.143	0.143
$j_{B\eta}/j_{H\iota}$	0.193	0.169	0.169	0.154	0.169	0.154	0.133	0.133	0.147	0.147	0.138	0.138

$\frac{n_u}{n_l}$ Ausdrücken durch departure Koeffizienten :

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{b_u}{b_l} \frac{g_u}{g_l} e^{-\Delta E/kT} = \frac{b_u}{b_l} \frac{g_u}{g_l} e^{-h\nu_0/kT} \quad (\text{Boltzmann})$$

$$K_V^c = K_V \cdot \left[1 - \frac{b_u}{b_l} \frac{g_l}{g_u} \frac{g_u}{g_l} e^{-h\nu_0/kT} \right]$$

$$K_V^c = K_V \left[1 - \frac{b_u}{b_l} e^{-h\nu_0/kT} \right]$$

Radio - Rekombinationslinien : Übergänge $m \rightarrow n$

$m, n \gg 1$ (z.B. $110 \rightarrow 109$, $139-137$)

$$m = n + \Delta n$$

$$b_m = b_n + \left. \frac{db_n}{dn} \right|_n \cdot \Delta n \quad (\text{Reihenentwicklung für } b_n)$$

$$\begin{aligned} \frac{b_m}{b_n} &= 1 + \left. \frac{1}{b_n} \frac{db_n}{dn} \right|_n \cdot \Delta n \\ &= 1 + \left. \frac{d}{dn} \ln(b_n) \right|_n \cdot \Delta n \end{aligned}$$

$$h\nu_0 \ll kT; \quad e^{-h\nu_0/kT} \approx 1 - \frac{h\nu_0}{kT}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_V^c &= K_V \left[1 - \left(1 + \left. \frac{d \ln b_n}{dn} \right|_n \Delta n \right) \left(1 - \frac{h\nu_0}{kT} \right) \right] \\ &= K_V \left[1 - 1 - \left. \frac{d \ln b_n}{dn} \right|_n \Delta n + \underbrace{\left(\left. \frac{d \ln b_n}{dn} \right|_n \Delta n + 1 \right)}_{b_m / b_n} \frac{h\nu_0}{kT} \right] \end{aligned}$$

$$K_V^c = K_V \left[\frac{b_m}{b_n} \frac{h\nu_0}{kT} - \left. \frac{d \ln b_n}{dn} \right|_n \Delta n \right]$$

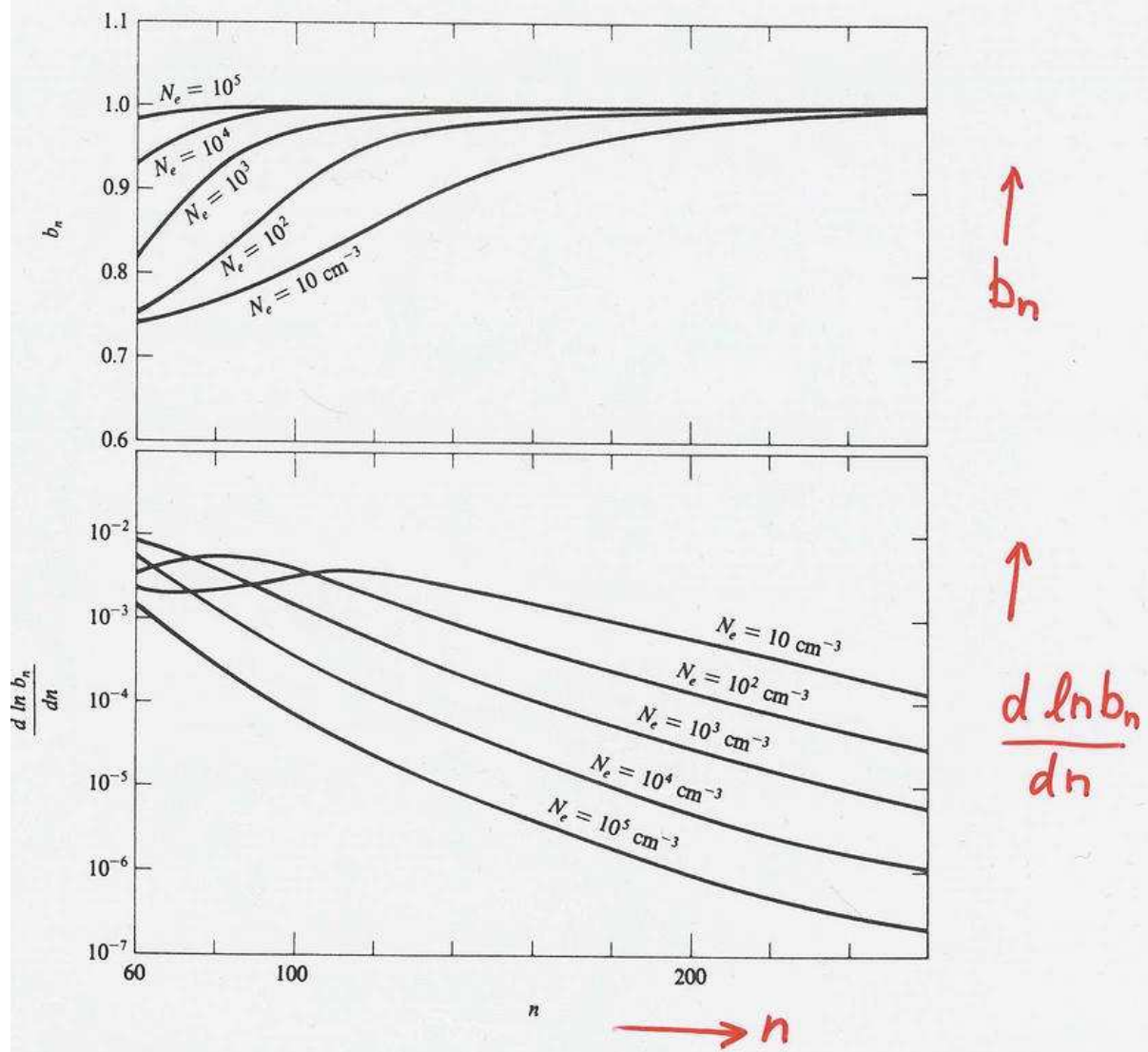


FIGURE 4.2
Dependence of b_n and $\frac{d \ln b_n}{dn}$ on n at various densities: $T = 10,000^\circ \text{ K}$.

wird negativ, wenn $\Delta n \frac{d}{dn} \ln b_n > \underbrace{\frac{b_m}{b_n}}_{\approx 1} \underbrace{\frac{h\nu_0}{kT}}_{\approx 10^{-5}}$

Intensität wächst an: $I_\nu = I_{\nu_0} e^{-\kappa_\nu^c \cdot s}$

Masereffekt hervorgerufen durch NLTE - Effekte

5.2 Kontinuumsstrahlung

Frei-gebunden und frei-frei-Strahlung

HI - Rekombinationskontinuum (frei-gebunden)

Im optischen Spektralbereich dominiert das frei-gebunden-Kontinuum, im IR- und Radiobereich frei-frei.

zusätzlich: 2-Photonen-Kontinua (z.B. $2^2S - 1^2S$ HI)

$$\lambda_c = 2431 \text{ \AA}$$

Emissionskoeffizient: $j_\nu = \frac{1}{4\pi} n_e n_p \gamma(\nu)$
 (erg cm³ s⁻¹ Hz⁻¹ sterad⁻¹)

$$\gamma := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \nu \sigma_{nl}(\nu) f(\nu) h\nu \frac{d\nu}{d\nu}$$

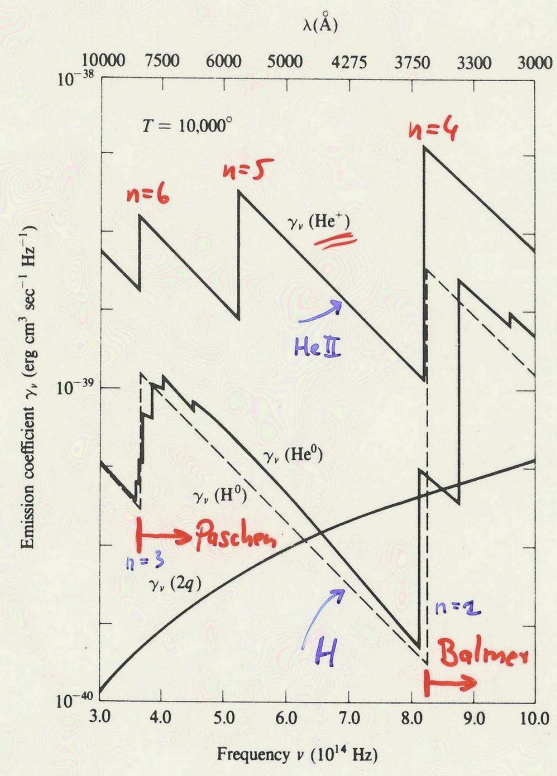
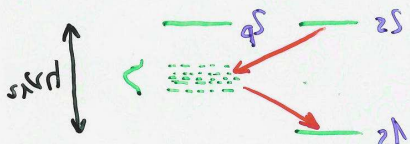


FIGURE 4.1 Frequency variation of continuous-emission coefficient $\gamma_\nu(H^0)$, $\gamma_\nu(He^0)$, $\gamma_\nu(He^+)$, and $\gamma_\nu(2q)$ in the low-density limit $N_e \rightarrow 0$, all at $T = 10,000^\circ$ K.

• Emission im S-Photonen - Kontinuum :



$$j\nu(s_p) = \frac{1}{\pi} n_{2s} A_{2s \rightarrow 1s} \cdot \int h\nu f(\nu) d\nu$$

S-Photonen

Wahrscheinlichkeit für Photonenemission im Frequenzintervall ν bis $\nu + d\nu$

$$5,16 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \approx 1512 \text{ \AA} \quad (\lambda_{\text{or}})$$

$P(\nu) d\nu$ symmetrisch um $\frac{1}{2} \nu_s$

→ Lösung der statistischen Gleichungen (wie für Linienemission) - Besetzungsdichte des Niveaus $2s$ muß bekannt sein
 (Berechnung). Wichtig: Elektronen- und Protonenstoße
 können $2s \rightarrow sp$ bewirken : Schwächung des S-Photonen Kontinuums

• Frei-frei - Emission (Bremsstrahlung) :

Abbremsung freier Elektronen im Coulombfeld von Ionen (i.w. H^+, He^+, He^{++}) mit Ladung Z (Klass. E.-dynamik)

$$j\nu = \frac{1}{\pi} n^+ n_e \frac{3Z^2 e^4 h}{3m^2 c^2} \left(\frac{\pi h \nu_0}{3kT} \right)^{1/2} e^{-h\nu/kT} g_{ff}(T, \nu, Z)$$

frei-frei Gantzfaktor

Ionen-dichte

Welcome to CWP at physics.UCLA.edu

Nuclear Physics

Contributions

Publications

Honors

Additional Information



Maria Goeppert Mayer

1906-1972

Some Important Contributions:

NUCLEAR SHELL MODEL:

Discovery of the magic numbers and their explanation in terms of a nuclear shell model with strong spin-orbit coupling. This was Maria Goeppert Mayer's most important contribution, for which she won the 1963 Nobel Prize in Physics (with J.H.D. Jensen, who had independently proposed the strong spin-orbit coupling). She was also the first person to investigate the theoretical basis of nuclear pairing, which plays an important role in the shell model.

OTHER IMPORTANT CONTRIBUTIONS:

Maria Goeppert Mayer was an accomplished physicist from the beginning of her career until the end and she made numerous contributions to the field of physics. She was the first person to investigate the phenomenon of double quantum emission and, a few years later, double beta decay. Mayer and Herzfeld were the first to study the effect of magnetic susceptibility on the refractive index of a gas. Mayer and Sachs pioneered the application of the new idea of a Yukawa potential between neutron and proton to the nuclear two-body system. Mayer was the first person to work out the atomic properties of transuranic elements as well. Mayer's last contribution, with Lawson, was the use of the center of mass and relative coordinates for the calculation of shell model interaction energies.

Some Important Publications:

NUCLEAR SHELL MODEL:

"On closed shells in nuclei" *Phys. Rev.* 74: 235 (1948).

"On closed shells in nuclei II" *Phys. Rev.* 75: 1969 (1949).

"Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model.

I. Empirical evidence," *Phys. Rev.* 78: 16 (1950).

II. Theoretical considerations" *Phys. Rev.* 78: 22 (1950).

● Radio - Kontinuum

(frei-frei-Strahlung): Absorptionskoeffizient

folgt aus j_ν mit Kirchhoff-Planck:
 $B_\nu = j_\nu / k_\nu$

$$K_\nu = n_e n_p \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{(6\pi m k T)^{3/2} \nu^2 c} g_{ff}(T, \nu, Z)$$

$$g_{ff} \sim T^{0.15} \nu^{-0.1} \quad (\text{Gauntfaktor})$$

$g_{ff} \approx 10$
im Gegensatz zum Optischen, wo $g_{ff} \approx 1$

→ optische Dicke:

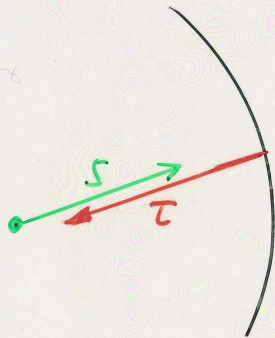
$$\tau_\nu = \int k_\nu ds$$

$$= 8.24 \cdot 10^{-2} T^{-1.35} \nu^{-2.1} \int n_p \cdot n_e ds$$

\uparrow K \uparrow GHz
=: E, Emissionsmaß

übliche Einheit von E: $[cm^{-6} \cdot pc]$

→ Jeder Nebel wird optisch dick bei genügend kleiner Frequenz ν (Radio-Frequenzen).



$$\frac{dI_\nu}{ds} = -k_\nu I_\nu + \eta_\nu$$

$$| \quad d\tau_\nu = -k_\nu ds$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\eta_\nu}{k_\nu}$$

$\eta/k = B$ im TE
TE liegt vor, da Maxwell vert. d. Elektr.

$$= I_\nu - B_\nu$$

integrierender Faktor: $e^{-\tau_\nu} \rightarrow$

$$e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - I_\nu e^{-\tau_\nu} = -B_\nu e^{-\tau_\nu}$$

$$\frac{d}{d\tau_\nu} [e^{-\tau_\nu} I_\nu] = -B_\nu e^{-\tau_\nu}$$

$$[I_\nu e^{-\tau_\nu}]_{\tau_\nu}^0 = - \int_{\tau_\nu}^0 B_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu$$

$$I_\nu(\tau=0) - \underbrace{I_\nu(\tau_\nu)}_{=0} e^{-\tau_\nu} = \int_0^{\tau_\nu} B_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu$$

(Keine Einstrahlung von hinten vorausgesetzt)

$$I_\nu(\tau=0) = \int_0^{\tau_\nu} B_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu \quad (*)$$

Radiofrequenzen: $h\nu \ll kT \rightarrow B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$

$$\approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{2kT\nu^2}{c^2}$$

Def: In Anlehnung an τ misst man nun Intensitäten (Rayleigh-Jeans-Näherung)

mit: $T_{b\nu} := \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu$ Strahlungstemperatur ("brightness temperature")

Einsetzen in (*): $\frac{2\nu^2 k T_{b\nu}}{c^2} = \int_0^{\tau_\nu} \frac{2k\nu^2 T}{c^2} e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu$

$$T_{b\nu} = \int_0^{\tau_\nu} T e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu$$

isothermer Nebel: $T_{b\nu} = T \int_0^{\tau_\nu} e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu$

$$= T(1 - e^{-\tau_\nu}) \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow T \cdot \tau_\nu \quad \tau_\nu \rightarrow 0 \\ \rightarrow T \quad \tau_\nu \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow T_{b\nu} \sim \nu^{-2.1} \quad \tau_\nu \rightarrow 0$
große Frequenzen opt. dünn

$T_{b\nu} \rightarrow T = \text{const} \quad \tau_\nu \rightarrow \infty$
Kleine Frequenzen opt. dick

frei-frei-Radio-Kontinuum
 $\rightarrow T$ -Bestimmung s. 5.6.3

Strahlungstransporteffekte

Für die meisten Linien kein Strahlungstransport erforderlich, weil Nebel optisch dünn, z.B. verbotene Linien.

H: optisch dünn in Balmerlinien
 optisch dick in Lymanlinien

Ausnahmen: Resonanzlinien z.B. C IV, 1550 Å
 He I - Triplets
 Bowen - Resonanzfluoreszenzlinien

Beschreibung des Strahlungstransports durch Entweichwahrscheinlichkeiten für Photonen ("escape probabilities")

Linienverbreiterung:
 • thermischer Dopplereffekt
 • Strahlungsdämpfung

Profilfunktion $\phi(\nu)$ für thermischen Dopplereffekt:

Linienabsorptionskoeffizient $\kappa_{\nu l} = \kappa_{0l} \cdot \phi(\nu) = \kappa_{0l} e^{-x^2} = \kappa_{0l} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}$
↪ $\nu - \nu_0$
 ↑
 Linienmitte

wobei: $\Delta\nu_D := \nu_0 v_{th} / c$ thermische Dopplerbreite

$v_{th} = \sqrt{\frac{2KT}{Am_H}}$ $A = \text{Atomgewicht}$

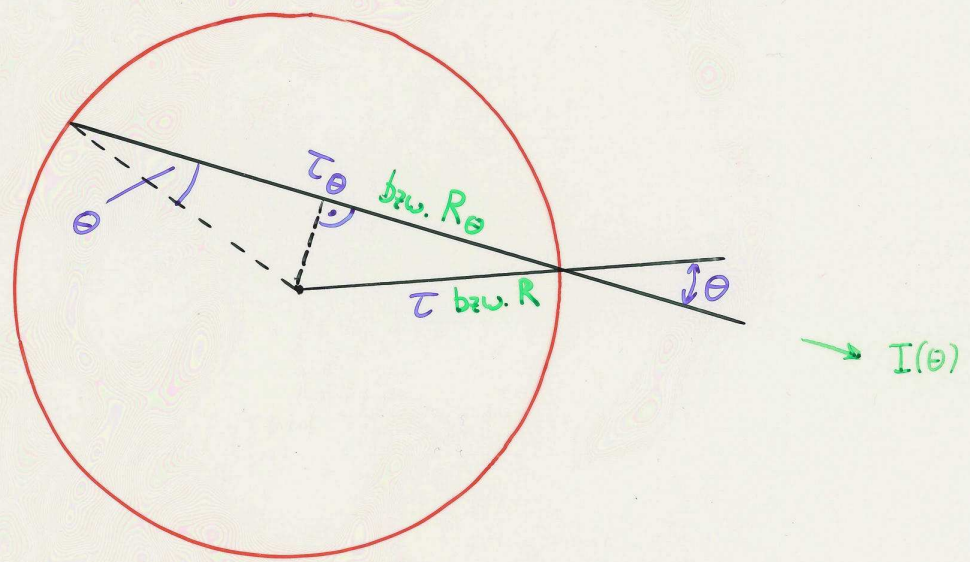
$= 12.85 \sqrt{\frac{T/\text{Kelvin}}{10^4 A}} \text{ km/s}$ $\kappa_{0l} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \frac{g_j}{g_i} \frac{A_{ji}}{\Delta\nu_D}$

Entweichwahrscheinlichkeit :

$$p = e^{-\tau_x}$$

τ_x : optische Tiefe vom Aufpunkt im Nebel zum Nebelrand in einer Richtung bei einer Frequenz x
 → Mittelung über alle Richtungen und über Absorptionsprofil → mittlere Entweichwahrscheinlichkeit

Idealfall: sphärisch symmetrischer Nebel (statisch)
 Radius R



$\tau = \kappa R$ optischer Radius des Nebels

$$\tau_\theta / 2 = \tau \cos \theta$$

τ_θ = Gesamtdicke entlang eines Sehstrahls

$$I(\theta) = \int_0^{2R_\theta} \epsilon e^{-\kappa s} ds = \epsilon \int_0^{2R_\theta} e^{-\kappa s} ds = \epsilon \left[-\frac{e^{-\kappa s}}{\kappa} \right]_0^{2R_\theta}$$

$$= \frac{\epsilon}{\kappa} (1 - e^{-2\tau \cos \theta})$$

ϵ = Emissionskoeffizient

Auswärtsfluß: $\pi F^+ = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_{\nu}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta$ (siehe Def. 3.2)
(pro cm² und sec)

$$\begin{aligned} \pi F^+ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\epsilon}{\kappa} (1 - e^{-2\tau \cos \theta}) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \frac{\epsilon}{\kappa} \left[\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} e^{-2\tau \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

Variablentransformation: $\mu = \cos \theta$ $d\mu = -\sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \pi F^+ &= 2\pi \frac{\epsilon}{\kappa} \left[-\int_1^0 \mu d\mu + \int_1^0 e^{-2\tau \mu} \mu d\mu \right] \\ &= \frac{2\pi \epsilon}{\kappa} \left[-\left[\frac{\mu^2}{2} \right]_1^0 + \left[\frac{e^{-2\tau \mu}}{4\tau^2} (-2\tau \mu - 1) \right]_1^0 \right] \\ &= \frac{2\pi \epsilon}{\kappa} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau^2} - \frac{e^{-2\tau}}{4\tau^2} (-2\tau - 1) \right] \\ &= \frac{\pi \epsilon}{\kappa} \left[1 - \frac{1}{2\tau^2} + e^{-2\tau} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ohne Absorptionwäre: $\pi F^+_{(0,abs)} = \frac{4\pi \epsilon \frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi R^2} = \frac{4\pi \epsilon}{3} R = \frac{4\pi \epsilon}{3} \frac{r}{\kappa}$

Entweichwahrscheinlichkeit: $p(\tau) = \frac{\pi F^+}{\pi F^+_{(0,abs)}}$

$$p(\tau) = \frac{3}{4\tau} \left[1 - \frac{1}{2\tau^2} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau^2} \right) e^{-2\tau} \right]$$

mittlere Entweichwahrscheinlichkeit (über das Linienabsorptionsprofil gemittelt):

$$\bar{p}(\tau_{0,line}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau_x) e^{-x^2} dx$$

numerisch integrieren.

Näherungsformel für $\tau_{0, \text{line}} \lesssim 50$: $\bar{p} = 1.72 / (\tau_{0, \text{line}} + 1.72)$

H- Lymanserie: $L_n : n^2 P \xrightarrow{\alpha, \beta, \gamma, \dots} 1^2 S$ $\xrightarrow{2, 3, 4, \dots}$

$P_n(L_m)$: Wahrscheinlichkeit, daß die Absorption eines L_n -Photons zur Emission eines L_m -Photons führt ($m < n$).

A_n : Gesamtzahl der L_n -Photonen pro Zeiteinheit, die im Nebel absorbiert werden.

R_n : Gesamtzahl der L_n -Photonen pro Zeiteinheit, die durch Rekombination und nachfolgende Kaskaden entstehen

J_n : Gesamtzahl aller L_n -Photonen pro Zeiteinheit ^{erzeugten}

$$J_n = R_n + \underbrace{\sum_{m=n}^{\infty} A_m P_m(L_n)}_{\text{Streuung (m=n) + Resonanzfluoreszenz}}$$

↑
Rekombination

E_n : Zahl der L_n -Photonen, die den Nebel verlassen

$$E_n = \bar{p}_n J_n = \bar{p}_n \left[R_n + \sum_{m=n}^{\infty} A_m P_m(L_n) \right]$$

↑
gesuchte
Größe → Lyman-Linienspektrum

Im Gleichgewicht : erzeugte Photonen J_n werden absorbiert (A_n) oder gehen dem Nebel verloren (E_n)

$$J_n = A_n + E_n = A_n + \bar{p}_n J_n$$

$$\Rightarrow A_n = (1 - \bar{p}_n) \left[R_n + \sum_{m=n}^{\infty} A_m P_m(L_n) \right] \quad (*)$$

da $\tau_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$: $\bar{p}_n \rightarrow 1$

d.h.: $A_k = 0$ für genügend großes k

$P_m(L_n)$ und R_n können aus Rekombinationstheorie berechnet werden.

A_n folgen aus (*): $A_{k+1} = 0$, $A_k \neq 0$

$$A_k = (1 - \bar{p}_k) [R_k + A_k P_k(L_k)]$$

$$A_{k-1} = (1 - \bar{p}_{k-1}) [R_{k-1} + A_{k-1} P_{k-1}(L_{k-1}) + A_k P_k(L_{k-1})]$$

⋮

$$A_1 = (1 - \bar{p}_1) \left[R_1 + \sum_{l=1}^k A_l P_l(L_1) \right]$$

Lyman-Linien nicht so interessant, da schwer beobachtbar.

Balmer-Linien? H_n $n^2 P \rightarrow 2^2 S$ bzw. $n^2 S \rightarrow 2^2 P$

$\hat{=} J_n \text{ oben}$ \nearrow	$K_n = S_n$ \nearrow	$+ \underbrace{\sum_{m=n}^{\infty} A_m P_m(H_n)}_{\text{Resonanzfluoreszenz von Lymanlinien, die zur Emission eines Balmer-Photons führen}}$	$+ \underbrace{\left(\sum_{m=n}^{\infty} B_m Q_m(H_n) \right)}_{\text{Resonanzfluoreszenz von Balmerlinien}}$
--	---------------------------	--	--

wenn $\tau(H\alpha) \ll 1 \rightarrow \{ \}$ vernachlässigen

$S_n, A_m, P_m(H\alpha)$ sind bekannt $\rightarrow K_n$

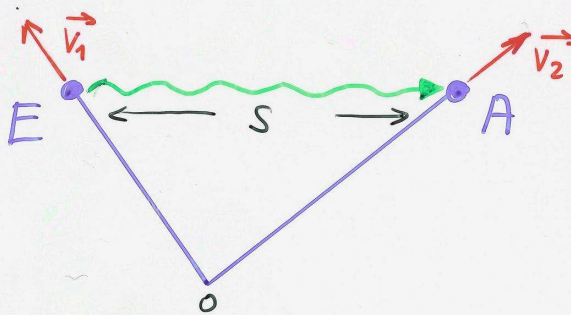
• Nebelexpansion und optische Tiefen

alle Nebel expandieren

sphärischer Nebel mit linearer Expansionsgeschwindigkeit:

$$v_{exp}(r) = w \cdot r$$

$$0 \leq r \leq R$$



Radialgeschwindigkeit zwischen E und A:

$$v_{rad}(r_1, r_2) = w \cdot s$$

Linienabsorptionsprofile sind verschoben nach:

$$\nu'(r_1, r_2) = \nu_L (1 + ws/c)$$

ν_L : Frequenz des emittierten Photons

optische Tiefe zum Nebelrand für ein Photon, das bei r_1 emittiert wurde:

$$\tau_\nu(r_1) = \int_0^{r_2=R} n_{low} K_{0,line} e^{-\underbrace{\{(\nu - \nu'(r_1, r_2)) / \Delta\nu_D\}^2}_{\text{Doppler shift}}}} ds$$

verringert τ_ν gegenüber dem statischen Fall!

Beobachtete Expansionsgeschwindigkeiten in PN:

$$v_{exp} \approx 10 \dots 90 \text{ km/sec}$$

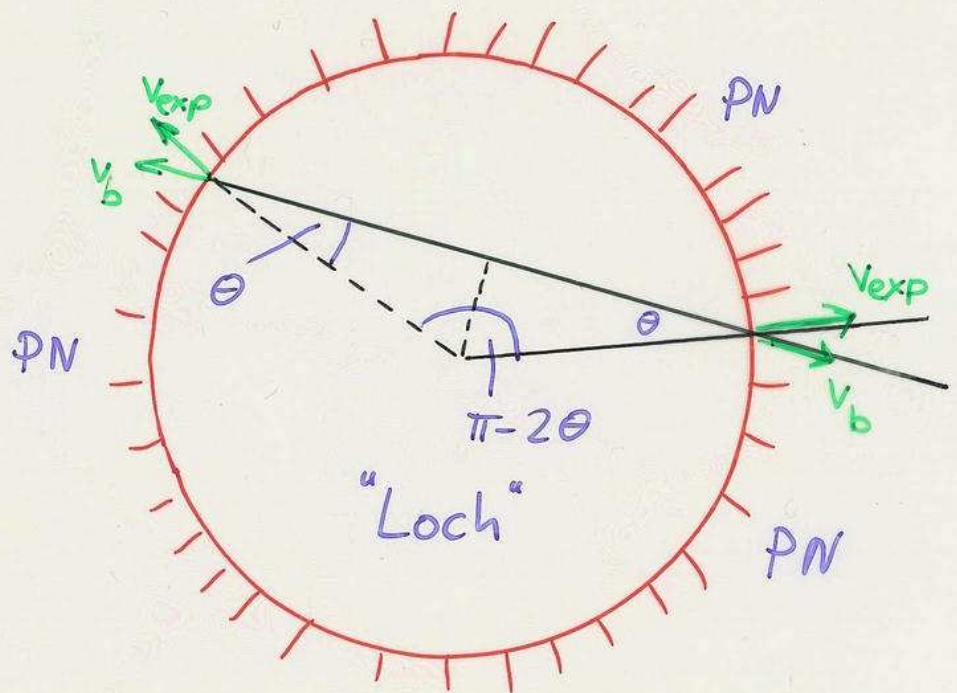
vgl. thermische Dopplergeschwindigkeiten:

$$v_{th} (H) = 12.8 \text{ km/sec}$$

$$v_{th} (He) = 6.4 \text{ "}$$

$$v_{th} (C) = 3.7 \text{ km/sec}$$

- PN: Photonen entweichen durch das zentrale "Loch"



$$v_a = v_{exp} \cdot \cos \theta$$

$$v_b = -v_{exp} \cdot \cos \theta$$

$$v_a - v_b = 2 v_{exp} \cos \theta$$

Geometrie wichtig für
Entweichwahrscheinlichkeit

• Bowen - Resonanz fluoreszenz

Koinzidenz: He II Ly α 303.78 Å
 mit
 O III 303.80 Å

thermische Dopplerbreite:

$$v_{th} = 12.85 \sqrt{\frac{T/10^4 K}{A}} \text{ km/sec} \quad A = \text{Atomgewicht} \\ \text{He} = 4$$

$$= 12.85 \sqrt{1/4} = 6.4 \text{ km/sec}$$

$$\hat{=} \Delta\lambda_{th} = 0.006 \text{ Å}$$

d.h. Trennung von He II Ly α und O III beträgt ~ 3 Dopplerbreiten
 $e^{-3^2} \approx 10^{-4}$

- Expansion des Nebels ($\sim 10 \text{ km/sec}$)

Durchtritt durch „zentrales Loch“ bewirkt Rotverschiebung der He II Ly α -Photonen um bis zu
 $20 \text{ km/sec} \hat{=} 0.02 \text{ Å}$

⇒ „Zentrales Loch“ verstärkt den
 Bowen - Resonanzfluoreszenz - Mechanismus