Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie

1. Vorbemerkungen

Es ist dem einzigartigen **Sir Isaac Newton** die Entdeckung der Gravitation zu verdanken, der sie 1687 in seinem Meisterwerk „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ als gegenseitige Anziehung zwischen physikalischen Körpern einführte und in mathematischer Form explizit, auf ein den Untersuchungen unterworfenes Körperpaar mit dem Abstand r einzelner Körper zueinander bezogen, als Kraft vom Betrage $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ **[1]** deutete. Die Gravitationskraft erweist sich in moderner Physik als eine der vier basischen Wechselwirkungsarten physikalischer Objekte (die weiteren drei Fundamentalkräfte sind die starke, schwache und elektromagnetische Interaktion), die allerdings erst auf makroskopischer Kontemplationsebene, insbesondere im Bereich astronomischer Größenordnungen, relevant wird und 1915 in **Albert Einstein**s Allgemeiner Relativitätstheorie endgültige theoretische Beschreibung mittels nichteuklidischer Geometrie erhalten hatte. Den Postulaten der Allgemeinen Relativitätstheorie werden wir uns im Rahmen bevorstehender Unterpunkte im Einzelnen zuwenden und begnügen uns zunächst mit der bereits Newton bekannten Feststellung, dass der Betrag des Vektors der Gravitationskraft zwischen zwei oder mehreren Körpern ihren Massen direkt, dem Quadrat ihrer gegenseitigen Distanz dagegen umgekehrt proportional ist, was auch der obigen Identität **[1]** entnommen werden darf.

Dennoch fingiert der Betrag der Gravitationskraft definitiv in der Nähe solcher astronomischer Objekte am größten zu sein, die im Allgemeinen als Schwarze Löcher bezeichnet werden (dieser Begriff wurde von **John Wheeler** um 1960 geprägt). Bereits **John Michell** stellte sich 1784, angesichts der Tatsache, dass die Stärke der Gravitationskraft in der Umgebung eines Körpers (z. B. eines Planeten oder Sterns) durch diejenige Geschwindigkeitsrate charakterisiert werden könnte, die ein „Probekörper“ (ergo ein verhältnismäßig kleinerer oder aber weniger massereicher astronomisches Objekt) zu erfahren hätte, um dessen anziehender Gravitationswirkung zu entfliehen (die sog. Austrittsgeschwindigkeit), die Frage, wie sich der Gravitationseffekt um einen solchen Körper manifestierte, der dem ihm nähergebrachten „Probekörper“ eine Austrittsgeschwindigkeit abverlangte, die derjenigen des Lichtes entspräche.

Bekanntlich erfordert das Überwinden der Gravitationswirkung der Erde beispielsweise von einer Rakete eine Austrittsgeschwindigkeit (im Bezuge auf die Erde auch als zweite kosmische Geschwindigkeit bekannt) von ca. 40.000 km/h, sodass es, obgleich die Lichtgeschwindigkeit c damals noch nicht als die höchste erreichbare Geschwindigkeitsmarke erkannt werden konnte, Mitchell tatsächlich rein hypothetisch gelungen war, zur Konklusion zu kommen, die ein Dezennium später auch vom großartigen Mathematiker und Astronom **Pierre Simon de Laplace** mathematisch formuliert werden sollte – nämlich, dass die Einführung oben angenommener Austrittsgeschwindigkeit vom Betrage c die Existenz desjenigen Körpers antizipiere, dessen enorme Masse auf einem äußerst kleinen Volumen verteilt wäre, sodass Lichtstrahlen entlang gekrümmter (z. B. geodätischer) Bahnen zu diesem Körper verliefen und sein unmittelbares Gravitationswirkungsgebiet niemals verlassen könnten. Derselben Schlussfolgerung ließe sich daher entnehmen, dass gefangene Lichtbündel im Gravitationsattraktionsgebiet des hiermit zunächst nur theoretisch postulierten massereichen Körpers eine Entdeckung desselben mittels bekannter optischer Beobachtungsinstrumente zunichte machen, womit dieser „*Michellsche Körper*“ vom äußeren Universum völlig abgegrenzt und nicht beobachtbar wäre, sodass jedes Objekt, das ihm genügend nahe käme aufgrund eines überragenden Einflusses der Gravitationskraft im Vergleich zu übrigen drei Fundamentalkräften auf einen Punkt unter Freisetzung enormer Energiemengen zerquetscht würde.

Das Entscheidende an der Überlegung von Mitchell bestand also darin, dass in ihr die Möglichkeit angestreift wurde, es gebe im Universum Objekte, die, obwohl auf der Basis einer von ihnen direkt ausgehenden Strahlung nicht wahrnehmbar, dennoch Gravitationseffekte auf Materie in ihrer Nähe ausüben würden, die sich vielleicht als nachweisbar erweisen könnten. Die Allgemeine Relativitätstheorie, deren Grundzüge im bevorstehenden Unterkapitel anzusprechen sind, legt theoretische Grundlagen als Erklärung des anziehenden Charakters der Gravitation fest, erfuhr allerdings erst 1968 eine der ersten Verifizierungen, nachdem die Entdeckung von Schwarzen Löchern und weniger massenreichen Neutronensternen geglückt hatte.

Denn Schwarze Löcher und Neutronensterne (beide Objektklassen dürfen also als Sterne aufgefasst werden) erfüllen die oben angesprochenen Extremalbedingungen, da deren Austrittsgeschwindigkeit dem Betrage c der Lichtgeschwindigkeit äußerst genau nahe kommt und Lichtstrahlen in ihrem angrenzenden Umfeld einem hypothetischen Beobachter mit dessen zunehmender Höhendistanz von der Sternoberfläche einen immer größer werdenden Beobachtungshorizont zuließen, der in einem bestimmten Höhendistanzpunkt sogar den vollen Umfang eben dieser angesprochenen Sternoberfläche erfassen könnte! Geradezu um des besseren Verständnisses angeführter Extrembedingungen des Gravitationsfeldes astronomischer Körper willen soll die Diskussion experimenteller Methoden, die zum Nachweis von Schwarzen Löchern führten und später auch der gezielten Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie angepasst wurden, im Mittelpunkte der vorliegenden Ausarbeitung stehen.

2. Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

(a) Spezielles und Allgemeines Relativitätsprinzip

Der klassischen Mechanik Newtons sowie der Speziellen Relativitätstheorie Einsteins zufolge werden stets Inertialsysteme, in denen Körper allein dem Zweiten Newtonschen Gesetze unterliegen, als diejenige physikalische Systeme gewertet, in denen physikalische Naturgesetze am einfachsten beschrieben werden. Des Weiteren würde dies die Gültigkeit der Aussage implizieren, dass sich von anderen materiellen Punkten genügend distanzierte materielle Punkte geradlinig gleichförmig bewegen oder aber im Ruhezustande verharren. Wendet man diese Betrachtungsweise auf Inertialsysteme an, so ergäbe sich die bereits **Galileo Galilei** bekannte Feststellung, dass Inertialsysteme im „engeren Sinne" des Relativitätsprinzips als Bezugssysteme zueinander eine gleichförmige Translation durchführen und demgemäss als solche gegenüber rotierenden sowie anderen Typen von Nicht-Inertialsystemen ausgezeichnet und untereinander gleichwertig sind. Dabei bedeutet „gleichwertig" nichts anderes als die Tatsache, dass jedwede Bewegung in relativer Form als auf einen Bezugskörper bezogen gedacht werden kann, sowie dass alle physikalischen Naturgesetze (wie z. B. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) inklusive der zwecks ihrer experimentellen Messung bedürfenden metrischen Eigenschaften sowohl in einem Inertialsystem K als auch in einem weiteren, diesem gegenüber gleichförmig geradlinig bewegten Inertialsystem K' gleicher formalen Beschreibung unterworfen sind, unabhängig davon, welches dieser zwei Inertialsysteme als das momentane eigentliche Bezugssystem gewählt wird.
Hiermit nähmen wir den Newtonschen Standpunkt der physikalischen Systembeschreibung ein, der alle eben postulierten Inertialsysteme, die wir der Einfachheit halber als Galilei-Bezugskörper nennen werden, als von allen möglichen Massenpunkten im Raume unbeeinflusst (d.h. hinreichend entfernt) und infolgedessen **inert** ansieht und hinsichtlich der Beschreibung physikalischer Vorgänge als in keiner Weise gegeneinander ausgezeichnet bewertet. Und selbst wenn die Bewegungsrelativität einzelner Inertialsysteme in ihrer Eigenschaft als mögliche zueinander gleichförmig bewegte Bezugssysteme (das sog. Galileische Relativitätsprinzip) im Sinne **Immanuel Kants** analytisch a priori sein sollte, so hat die **Gleichwertigkeit** einzelner Inertialsysteme im Rahmen der sog. physikalischen Naturbeschreibung unbedingt als in demselben Manier syndethisch betrachtet zu werden, da sie keinesfalls in den Begriffen „Bezugskörper" bzw. „Bewegung" enthalten ist und als nichttautologisch lediglich durch Erfahrung verifiziert werden kann. Denn die angesprochene „Gleichwertigkeitseigenschaft" von Inertialsystemen repräsentiert geradezu die revolutionäre Erkenntnis der Einsteinschen Speziellen Relativitätstheorie, die, wie der Name schon andeutet, im engeren relativistischen Sinne speziell auf Inertialsysteme Akzente setzt.
Der Betrachtung der Speziellen Relativitätstheorie entziehen sich allerdings die sich einem Inertialsystem K gegenüber beschleunigt bewegenden Systeme, da für diese das Galileische Relativitätsprinzip, aufgrund eventuell nicht vernachlässigbarer, bezugsabhängiger Scheinkräfte, nicht erfüllt und somit auch die gegenseitige Homogenität bzw. Isotropie solcher Systeme keinesfalls gewährleistet werden kann. Auf der Basis noch anzustellender Überlegungen verallgemeinert Einstein allerdings die für die Spezielle Relativitätstheorie derart charakteristische, auf physikalischer Naturbeschreibung einzelner Inertialsysteme bezogene Gleichwertigkeitseigenschaft, indem er diese sogar auf rotierende bzw. auf alle mögliche beschleunigte Systeme ausdehnt und somit die Bevorzugung von Inertialsystemen im Zuge der Aufstellung von physikalischen Naturgesetzen fallen lässt.
Bevor wir alle angedeuteten Gedankenkonzepte eingehender beleuchten und uns den Postulaten der Allgemeinen Relativitätstheorie zuwenden, seien im Folgenden alle Definitionen möglicher „Relativitätsstufen" konzis angesprochen:
→ **Galileisches Relativitätsprinzip**: Ein sich selbst überlassener, von allen Massenpunkten hinlänglich entfernter Massenpunkt bewegt sich gleichförmig und geradlinig, wobei im Bezuge auf das Inertialsystem K (Galileischer Bezugskörper) physikalische Gesetze die einfachste Form aufweisen müssen. K, das beispielsweise durch das System von Fixsternen symbolisiert werden dürfte, wäre somit ein bevorzugtes Beschreibungssystem physikalischer Phänomene, in dem die Determinierung der Bewegung eines Körpers immer und nur in Relation auf einen gewählten Bezugskörper erfolgt.
→ **Spezielles Relativitätsprinzip**: „Außer dem Inertialsystem K sollten alle diejenige Bezugskörper K' bevorzugt und mit K für die Formulierung der Naturgesetze genau gleichwertig sein, welche relativ zu K eine geradlinig gleichförmige, rotationsfreie Bewegung ausführen: alle diese Bezugskörper werden als Galileische Bezugskörper angesehen und nur für sie wurde die Gültigkeit des Relativitätsprinzips angenommen, für andere (anders bewegte) nicht." (Einsteinsche Formulierung, s. **[2]**, S. 40) Insofern kommen alle möglichen Inertialsysteme K, K', K'', etc. als wählbare gleichberechtigte Bezugskörper (Referenzkörper) einer Bewegung in Betracht und in der Forderung nach der Beschreibungsgleichwertigkeit all dieser Inertialsysteme bezüglich der Formulierung physikalischer Naturgesetze wird simultan auch die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als eines der basischen, in allen Inertialsystemen gültigen physikalischen Extremalprinzipien latent eingebettet.
→ **Allgemeines Relativitätsprinzip**: „Alle Bezugskörper K, K', usw. sind für die Naturbeschreibung (Formulierung der allgemeinen Naturgesetze) gleichwertig, welches auch deren Bewegungszustand sein mag." (Einstein-

sche Formulierung, s. **[2]**, S. 40) Vorerst sei lediglich diese Einsteinsche Definition der Allgemeinen Relativität angegeben. Ihrer genaueren Festlegung werden wir in bevorstehenden Unterkapiteln Aufmerksamkeit schenken.

(b) Postulate

Wie wir sahen, bedient sich die Spezielle Relativitätstheorie idealer Inertialsysteme, die sich per definitionem über das gesamte Raumzeitkontinuum ausdehnen. Mittels der Allgemeinen Relativitätstheorie beseitigt Einstein auch diese Einschränkung, indem er, um es mit Worten Wheelers zu sagen, festlegt: „*Die Materie erzählt dem Raum, wie er sich krümmen soll, und der Raum antwortet, indem er der Materie sagt, wie sie sich bewegen soll*“, und somit die Newtonsche Fiktion des Absoluten Raumes endgültig beseitigt. Einstein nimmt seine Allgemeine Relativitätstheorie in diesem Kontext **Goldstein** zufolge als auf fünf Postulaten fußend an (s. **[5]**, S. 350 – 352):
→ **Das Machsche Prinzip**: Den Kern der Speziellen Relativitätstheorie nehmen Inertialsysteme ein. **Ernst Mach** bemerkte, dass Newtonsche Inertialsysteme nicht gegen das System der Fixsterne rotieren, woraus er das Prinzip ableitete, dass Trägheitseigenschaften durch die Existenz (Anwesenheit) anderer Körper im Universum bestimmt sind.
→ **Das Äquivalenzprinzip**: Die schwere Masse eines beliebigen Körpers kann immer und überall gleich seiner trägen Masse gesetzt werden.
→ **Das Prinzip der Kovarianz**: Alle Beobachter, unabhängig davon, ob sie sich in einem Inertialsystem befinden, wie im Falle der Speziellen Relativitätstheorie, oder ob sie sich in Nicht-Inertialsystemen bewegen, beobachten dieselben Gesetze der Physik. Dies hat zur Folge, dass die physikalischen Gesetze durch Tensoren ausgedrückt werden können, da Tensoren geometrische Objekte darstellen, die unabhängig von einem Koordinatensystem definiert sind. Dabei ist ein Tensor n-ter Stufe als eine physikalische oder mathematische Größe aufgefasst, die sich in einem kartesischen Koordinatensystem K durch m^n Elemente beschreiben lässt, und für die bei einer Transformation in ein Koordinatensystem K’ die Regeln der linearen Transformation relevant sind. In Anbetracht des Raum-Zeit-Kontinuums der Allgemeinen Relativitätstheorie wird meistens m = 4 festgesetzt.
→ **Das Korrespondenzprinzip**: In schwachen Gravitationsfeldern und für Geschwindigkeiten, die viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit, müssen die Aussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie approximativ mit den Vorhersagen der Newtonschen Mechanik übereinstimmen. Im Grenzfall verschwindender Gravitationsfelder müssen die Aussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie in die der Speziellen Relativitätstheorie übergehen.
→ **Das Prinzip der minimalen Kopplung**: Beim Übergang von der Speziellen zur Allgemeinen Relativitätstheorie sollen keine Terme eingeführt werden, die explizit die Krümmung enthalten.
Verweilen wir ein wenig bei der im fünften Postulat angesprochenen Raumkrümmung: Das erste Newtonsche Gesetz sagt aus, dass Körper sich in Abwesenheit externer Kräfte unbeschleunigt und geradlinig fortbewegen. Die oben erwähnten Postulate legen allerdings die Vermutung nahe, dass sich, wie dies im Unterkapitel **5** ersichtlich wird, Körper in der Allgemeinen Relativitätstheorie auf Geodäten der Raumzeit bewegen. Denn hat man eine Geodätenschar vor sich und das Gravitationsfeld in betrachteter Region homogen ist, so sind die Geodäten parallel, ansonsten, falls das Gravitationsfeld inhomogen sein sollte, müssten die Geodäten allmählich aufeinander zu oder voneinander weg laufen. Dies bedeutet aber, dass die Veränderung des Geodätenabstandes, die sog. geodätische Abweichung, ein Maß für die Homogenität des Gravitationsfeldes ist, wobei in der Nähe der Erdoberfläche häufig die Homogenität des Gravitationsfeldes über kleine Bereiche angenommen wird.
Es mögen abschließend zwei Bälle in einem horizontalen Abstand d voneinander betrachtet werden, die gleichzeitig über derselben Höhe über der Erdoberfläche losgelassen werden. In unmittelbarer Nähe der Bälle dürfte man Raumbereiche um sie herum als Inertialsysteme deuten, sodass man sogar lokal die Gravitationseffekte durch geeignete Wahl von Bezugssystemen eliminieren könnte. Und dennoch nimmt während des Falls beider Bälle der geodätische Abstand d zwischen ihnen kontinuierlich ab, sodass man geradezu diese Verringerung der geodätischen Abweichung statt des Falls von Bällen an sich als das lokale Gravitationsmaß zu betrachten geneigt ist, da sich lediglich die geodätische Abweichung durch keine „geeignete“ Koordinatensystemwahl „ignorieren“ lässt. Insofern dürfte man eben im Umstand, dass die Allgemeine Relativitätstheorie lediglich die differentiellen Effekte als echte Gravitationseffekte ansieht, wogegen alle anderen Einflüsse der Gravitation (wie beispielsweise der freie Fall zur Erde) durch eine geschickte Wahl des Bezugssystems zum Verschwinden gebracht und daher vernachlässigt werden könnten, des Revolutionären an ihrer Interpretation der Gravitationskraft gewahr werden.

(c) Das Gravitationsfeld und die Gleichheit der schweren und trägen Masse

Genauere Untersuchungen elektromagnetischer Erscheinungen haben ergeben, dass es eine Fernwirkung (eine unvermittelte Wirkung in die Ferne), wie von Newton ursprünglich angenommen, im Allgemeinen bereits aufgrund des endlichen Wertes der Lichtgeschwindigkeit, nicht geben kann. Denn wird beispielsweise ein Magnet betrachtet, der ein Eisenstück anzieht, so kann man sich keinesfalls mit der teilweise sogar metaphysisch anmutenden Vermutung begnügen, der Magnet affektiert das Eisen direkt und augenblicklich durch den leeren Zwischenraum hindurch, sondern neigt eher der Auffassung **Faraday**s zu, die Anwesenheit des Magneten rufe im ihn umgebenden Raume, den man sich seit Einstein nicht mehr als absolut und starr vorstellt sondern diesen sogar als eine Art „elastischer Membran" ansieht, die Einwirkungen vorhandener Massenkörper „erleidet" und auf diese auch adäquat „reagiert", stets etwas „physikalisch Reales" hervor, das seinerseits wieder auf das Eisenstück einwirkt und es zum Magneten streben lässt, und das wir mit dem Begriffe „magnetisches Feld" versehen wollen. Überhaupt scheint der *Feldbegriff* eine der fruchtbarsten theoretischen Konzeptionen zur Klärung physikalischer Phänomene darzustellen, die auf die Entwicklung der modernen Physik maßgeblichen Einfluss ausgeübt hatte, weswegen ihm auch innerhalb vorliegender Ausarbeitung das ganze Kapitel **6b)** gewidmet werden soll. Im Moment beharren wir auf der Untersuchung des Feldbegriffes nur insofern man mit diesem sowie der mit ihm verknüpften Nahwirkung die Ausbreitung von (elektromagnetischen) Wellen theoretisch viel „befriedigender" formulieren kann, und bei dieser Konstatierung wollen wir unsere eingehendere Untersuchung des Feldbegriffes vorerst „aufhalten".

In Analogie zur magnetischen Attraktion zwischen dem Magneten und dem ihm angenäherten Eisenstück wollen wir die Gravitationseinwirkung der Erde auf einen ihr zufallenden Stein so deuten, dass diese indirekt zustande kommt, indem die Erde in ihrer unmittelbaren Umgebung ein Gravitationsfeld erzeugt, das durch Nahwirkung auf den Stein einwirkt (diese Nahwirkung könnte man sich als „Krümmung" oder „Verbeulung" der elastischen „Raummembran" seitens der Erdmasse plastisch vor Augen führen) und dessen Fallbewegung veranlasst. Dieses Gravitationsfeld müsste dann der der Newtonschen Formulierung eignenden Eigenschaft genügen, dass die Stärke desselben bei der doppelten Verringerung des Abstandes eines Steines von der Erde vierfach oder, in extremen Fällen, wie beispielsweise innerhalb der Felder sehr massenreicher Sterne, der Schwarzschildschen Metrik* zufolge, gar auf das fünf- bis sechsfache zunimmt.

* Eine Metrik ist, formal mathematisch ausgedrückt, nichts anderes als die Festlegung von denjenigen Quadriken, die in der Speziellen Relativitätstheorie im raum-zeitlichen *Minkowski-Diagramm* zur Einheitslängeneichung der Koordinaten sowohl des ruhenden Inertialsystems K als auch des zu diesem gleichförmig geradlinig bewegten Inertialsystems K' Applikation finden. Im Minkowski-Raum-Diagramm sind Koordinatensysteme, die K bzw. K' repräsentieren sollten, jeweils affin zueinander verschoben und die ihnen zugrundeliegende, nach **Hermann Minkowski** benannten Minkowski-Metrik, die im Unterkapitel **5d)** angesprochen werden soll, führt Hyperbeln als „Eichungsquadriken" das Raum-Zeit-Kontinuum vertretender Koordinatensysteme K und K' im Minkowski-Raume ein. Natürlich impliziert die betonte affine Achsenverschiebung der zweidimensionalen Koordinatensysteme K und K' keinesfalls, dass diese Inertialsysteme auch in der Realität notwendig affin zueinander verschoben zu sein haben! Denn Minkowski-Diagramme sind freilich lediglich abstrakte Darstellungsmodelle des Raum-Zeit-Kontinuums und dürfen als solche keine materielle Wirklichkeit beanspruchen.

Statt sich jedoch mit der Schwarzschild-Metrik zu befassen, sei vielmehr auf eine Eigenart des Gravitationsfeldes hingewiesen, die den elektromagnetischen Feldern *nicht* eignet und dennoch von fundamentaler Bedeutung für die Allgemeine Relativitätstheorie ist: *Die sich unter ausschließender Wirkung des Schwerefeldes bewegenden Körper erfahren nämlich eine Beschleunigung, die weder vom Material noch vom physikalischen Zustande dieser Körpers im geringsten abhängt*. So fallen zwei gleichförmige Gegenstände im Vakuum, die man mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit loslässt, immer mit nämlicher Geschwindigkeit.

Diesen Sachverhalt wollen wir nun dahingehend formulieren, dass wir das Zweite Newtonsche Gesetz zunächst in der beliebige Kraftarten erfassenden Form „Kraft = (träge Masse) x (Beschleunigung)" ausdrücken, dasselbe allerdings, bezogen auf die Schwerkraft, auch als „Kraft = (schwere Masse) x (Intensität des Schwerefeldes)" verstehen. Hierbei haben sowohl schwere als auch träge Masse die für den betrachteten Körper charakteristische Konstanten zu symbolisieren, sodass aus obigen zwei Relationen folgt: „(Beschleunigung) = [(schwere Masse) / (träge Masse)] x (Intensität des Schwerefeldes)". Soll nun, erfahrungsgemäß, bei vorhandenem Gravitationsfelde die Beschleunigung unabhängig vom Zustande und der Natur eines Körpers stets dieselbe sein, so hat das Verhältnis der schweren zur trägen Masse, das durch geeignete Einheitswahl neutralisiert (d.h. zu 1 gemacht) werden kann, ebenfalls für alle Körper gleich zu sein. Dies hieße jedoch zwingend, die schwere und träge Masse eines Körpers gleichen einander! Denn dieselbe *Qualität* eines Körpers (seine Masse nämlich) manifestiert sich, je nach Umständen, entweder als „Trägheit" (der Widerstand des Körpers gegen jede ihn beschleunigende externe Kraft) oder aber als „Schwere" (die vom Gravitationsfelde zu überwindende Widerstandsintensität eines Körpers seiner Anziehung gegenüber) desselben, eine Erkenntnis, deren Tragweite erst der Allgemeinen Relativitätstheorie eindeutig entnommen werden konnte.

Dies bedeutet allerdings im Bezuge auf das oben angegebene Äquivalenzprinzip, dass innerhalb der Genauigkeit aller bisher durchgeführten Experimente das Verhältnis der schweren Masse (der im Newtonschen Gravitationsgesetz auftretenden Masse) zur trägen Masse (der im Zweiten Newtonschen Gesetz als Proportionalitätskonstante zwischen Kraft und Beschleunigung auftretenden Masse) eines beliebigen Körpers weder von seiner Gesamtmasse noch von seiner Zusammensetzung abhängt. Es gibt also kein lokales Experiment, das zwischen einem rotationslosen freien Fall in einem Gravitationsfeld und gleichförmiger Bewegung in Abwesenheit von Gravitationsfeldern unterscheiden könnte. Ebenso können lokale Experimente nicht unterscheiden, ob ein Körper in einem homogenen Gravitationsfeld ruht oder in Abwesenheit von Gravitationsfeldern gleichförmig beschleunigt wird (beispielsweise in einer Rakete). Das einzige, was sich feststellen ließe, wäre das Faktum, dass, von einem Galileischen Bezugssystem K aus betrachtet, um ein beliebig bewegtes Nicht-Inertialsystem K' kein homogenes sondern ein zeitlich veränderliches Gravitationsfeld herrscht.

(d) Unzulänglichkeiten der klassischen Mechanik und der Speziellen Relativitätstheorie

Man verspürt große Unzufriedenheit, wenn man rückblickend feststellt, dass sowohl die klassische Mechanik Newtons als auch die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins ihre Konklusionen einzig auf Bezugssysteme beziehen, die dem Galileischen Relativitätsprinzip genügen, und somit eine Bevorzugung dieser Bezugssysteme gegenüber Nicht-Inertialsystemen aufstellen, denn man sieht sich letzten Endes zur Frage genötigt, weswegen man überhaupt von einer Bevorzugung Galileischer Bezugskörper hinsichtlich physikalischer Naturbeschreibung ausgehen *muss*. Denn rein prinzipiell besteht kein auffindbarer Grund, weswegen sich Inertialsysteme zur physikalischen Interpretation von Naturgesetzmäßigkeiten besser eignen würden als nicht-inertiale Bezugskörper. Selbst der Einwand, Inertialsysteme K verdienten deswegen den Vorzug, da in ihnen die physikalische Weltbeschreibung ihre simpelste Formulierung erfahre, ist kein zufriedenstellendes Argument, denn kein Naturgesetz verbietet mir, Nicht-Inertialsysteme K' zwecks einer Beschreibung physikalischer Erscheinungen zu Rate zu ziehen. Tatsächlich wird man immer vergeblich nach einem *Grund* für das unterschiedliche, von K und K' jeweils beurteilte Verhalten von Körpern suchen, insbesondere wenn der Bewegungszustand eines Bezugskörpers demjenigen eines gleichmäßig rotierenden entspricht, der zu seiner Aufrechterhaltung keiner externen Einwirkung bedarf.

Insbesondere ist in diesem Sinne das Experiment Newtons mit dem Wassereimer, auf das sehr ausführlich **Carl Friedrich von Weizsäcker** in seiner meisterhaften Studie „*Einstein und Bohr*" alludiert, der Erwähnung wert: „Newton ließ ein Gefäß, in dem sich Wasser befand, um seine senkrechte Achse rotieren, und zeigte, dass der Wasserspiegel am Rande des Gefäßes infolge der Zentrifugalkraft, d. h. der Trägheit, aufstieg, wenn sich das Wasser zusammen mit dem Gefäß drehte, nicht aber, wenn sich das Gefäß drehte, solange das Wasser noch in Ruhe war. Im ersten Fall dreht sich nach ihm das Wasser relativ zum absoluten Raum, während es relativ zum umgebenden Gefäß in Ruhe ist. Im zweiten Fall ist es relativ zum absoluten Raum in Ruhe, während es zum umgebenden Gefäß gedreht ist. Nur die Drehung relativ zum absoluten Raum erzeugt eine Zentrifugalkraft. Drehung aber ist im Sinne Newtons eine beschleunigte Bewegung." (s. **[11]**, S. 204 – 205)

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts nahm Mach die geschilderte Argumentation Newtons erneut unter die Lupe und interpretierte, das Wasser drehe sich, wenn es mit dem Gefäß umhergerührt werde, ja nicht nur relativ zu dem hypothetischen absoluten Raum, sondern auch relativ zur Umwelt des Gefäßes, nämlich dem Zimmer, der Erde und dem Weltall. Dieser Gedankengang wurde später in die Allgemeine Relativitätstheorie als dessen erstes Postulat (das Machsche Prinzip) aufgenommen und beeinflusste Einsteins Konzeptionen, seinen autobiographischen Zugeständnissen zufolge, enorm. Um es überhaupt vermeiden zu können, nach dem oben gefragten Grund für die deskriptive Bevorzugung von Inertialsystemen hinsichtlich physikalischer Untersuchungen von Naturgesetzen zu fahnden, wurde Einstein allmählich zu einer die Spezielle Relativitätstheorie generalisierenden Theorie, der Allgemeinen Relativitätstheorie eben, geführt, deren Gleichungen für jeden Bezugskörper gelten, dessen ungeachtet, in welchem physikalischen Zustande ein solcher Bezugskörper auch sein mag.

Dass die Zentrifugalkraft bzw. die Trägheit nicht als eine Wirkung der Drehung eines Körpers relativ zur Erde und dem durch sie symbolisierten absoluten Raum verstanden werden kann, sondern vielmehr eine Folge der Drehung zu fernen Körpern im Universum (ergo zu sog. als idealistisch ruhend angenommenen, noch erkennbaren fernen Fixsternen am Firmament) darstellt, belegen außerdem eindeutig die Abplattung der Erde sowie der Foucaultsche Pendelversuch. Für die Wissenschaftler des 17. Jahrhundert muss die Postulierung einer dem Aristotelismus Rechnung tragenden, auf Fernwirkung beruhenden Beeinflussung voneinander räumlich entfernter physikalischer Körper wie ein Schock gewirkt haben, da man sich zu jener Zeit noch nicht von der aktuellen Vorstellung zu lösen vermochte, dass die physikalische Kausalität, die anders als durch die direkte Berührung zweier Körper vermittelt sein sollte, für undenkbar zu halten sei. Obwohl in Newtonscher Epoche revolutionär, genügte die Fernwirkung ostentativ nicht, um die Eigenartigkeit der Trägheit zu erklären, ein Umstand der bereits Newton, dem einzigen Ritter in der naturwissenschaftlichen Entwicklungsgeschichte der Physik, bekannt war, den er jedoch vergeblich zu entkräften trachtete und somit selbst lebenslang an seiner eigenen Kreation, dem Gravitationsgesetz, zu zweifeln gezwungen war.

Die Genialität Einsteins zeigt sich geradezu darin, dass er, anders als Mach, dem Fernwirkungsprinzip nicht treu blieb, sondern den oben erwähnten Faradayschen Feldbegriff zur genaueren theoretischen Deutung der Trägheit sowie der Gravitationskraft heranzog. Hinsichtlich dieses weiteren revolutionären Konzeptes der Ausdehnung des Feldbegriffs auf die Mechanik und die damit zusammenhängende Vollendung der Faradayschen Elektrodynamik durch die Spezielle Relativitätstheorie schreibt Weizsäcker in seiner Studie „*Einstein und Bohr*": „Es war daher für Einstein von vornherein klar, dass er, auch wenn er Machs Kritik des absoluten Raumes folgte, dies nur in der Gestalt einer Feldphysik tun könne. Eine direkte Einwirkung der fernen Massen auf den Wasserspiegel in Newtons Gefäß kam für Einstein so wenig in Betracht wie für Newton selbst. Die Lösung, die Einstein gab, ist in gewisser Weise eine Radikalisierung des Newtonschen Ansatzes (nämlich der Annahme der Existenz eines absoluten Raumes, Anm. d. A.) […] Einstein unterscheidet in der Allgemeinen Relativitätstheorie zwischen der Materie und dem Raum, genau wie es Newton tat. Der Raum ist nun aber nicht eine a priori gegebene absolute Größe, die zwar – wie bei Newton – physikalische Wirkungen ausüben, aber keine empfangen kann, sondern er hat eine von Ort zu Ort veränderliche Krümmung, welche durch die dort vorhandene Materie kausal hervorgebracht wird (daher bedienten wir uns oben eines Vergleiches des physikalischen Raumes mit einer endlosen elastischen Membran, Anm. d. A). **Gottfried Wilhelm Leibniz** und Mach hatten also durchaus unrecht damit, dass sie meinten, es gebe „den Raum“ als physikalischen Gegenstand nicht. Die Inkonsequenz, die sie in Newtons System (aufgrund der Unendlichkeit des Raumes und der Unmöglichkeit der Festlegung eines Mittelpunktes desselben, Anm. d. A.) aufgespürt hatten, wird umgekehrt dadurch behoben, dass man den Raum ganz und gar zu einem physikalischen Gegenstand macht, der Wirkungen nicht nur ausüben sondern auch erleiden kann.“ (s. **[11]**, S. 206)

(e) Schlussfolgerungen aus der Allgemeinen Relativitätstheorie

Bisherige Ausführungen ergaben unmissverständlich, dass uns die Allgemeine Relativitätstheorie die rein theoretische Ableitung der Eigenschaften des Gravitationsfeldes gestattet und auch den Einfluss des Gravitationsfeldes auf diejenige physikalischen Vorgänge vorherzusagen ermöglicht, deren Gesetze im in der Speziellen Relativitätstheorie zum Ausdruck gekommenen Extremfalle verschwindender Gravitationsfelder bereits als bekannt vorausgesetzt werden dürften. Vor allem die uns aus der Speziellen Relativitätstheorie her bekannte Eigenschaften der Lichtausbreitung betreffende Schlussfolgerung, die wir in Folgendem zu ziehen dabei sind, erweist sich als höchst bemerkenswert.
Zu diesem Zwecke soll erneut ein Galileisches System K betrachtet und zusätzlich angenommen werden, dass die theoretische Beschreibung eines in diesem Inertialsystem verlaufenden physikalischen Vorgangs vollständig ist. Unter diesen Voraussetzungen ist es rechnerisch möglich zu bestimmen, wie sich dieser bekannte Naturvorgang von einem relativ zu K beschleunigten Bezugskörper K’ (also einem Nicht-Inertialsystem) aus darstellt. Da aber relativ zu diesem neuen Bezugskörper K’ ein Gravitationsfeld existiert, das des Weiteren auch noch aufgrund der beschleunigten Bewegung von K’ zeitlich veränderlicher Natur ist, so muss man in unsere mathematische Berechnung des studierten Vorgangs auch dessen Beeinflussung vom präzisierten Gravitationsfelde einfließen lassen. Einen solchen Einfluss des Gravitationsfeldes erkennt man an der Tatsache, dass ein Körper, der gegenüber K eine aus dem Galileischen Relativitätsprinzip folgende geradlinig gleichförmige Bewegung ausführt, gegenüber dem beschleunigten Bezugssystem K’ eine krummlinige Bewegungsbahn verfolgen wird, denn diese Beschleunigung bzw. Krümmung von K’ entspricht gerade dem angedeuteten Einfluss des relativ zu ihm herrschenden Gravitationsfeldes auf den bewegten Körper.
Durch Anwendung dieser Überlegung auf einen Lichtstrahl, der bekanntlich, der Speziellen Relativitätstheorie zufolge, geradlinig mit einer endlichen Geschwindigkeit c propagiert, wird ein Ergebnis von großer Bedeutung ersichtlich, nämlich die Konklusion, *dass sich Lichtstrahlen in nicht vernachlässigbaren Gravitationsfeldern im allgemeinen krummlinig fortpflanzen*. Spätere Untersuchungen der geometrischen Eigenschaften dieser krummlinigen Bahnen, die im Unterkapitel **5** mittels nicht-euklidischer Geometrien durchgeführt werden sollen, werden zeigen, dass diese Bahnen die Geodätenform oder Spiralform haben. Außerdem wird sich zeigen, dass die Beschaffenheit des um das System K’ aufgebauten Gravitationsfeldes im Wesentlichen von der Bewegungsart dieses Systems selbst abhängt und die Allgemeine Relativitätstheorie alle möglichen Bewegungsmöglichkeiten von K’ gegenüber (relativ zu) K, beschleunigten oder unbeschleunigten (galileischen) Typus’, in vollem Ausmaße beschreibt, womit auch die von der Gravitation losgelöste, galileische Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie als Extremfall eben dieser Allgemeinen Relativitätstheorie erfasst werden können. Denn die Allgemeine Relativitätstheorie kollidiert nicht mit den Postulaten der Speziellen Relativitätstheorie, sie verallgemeinert sie vielmehr auf nicht mehr ignorierbare Gravitationseffekte in ähnlicher Art, wie die Feldgleichungen **James Clerk Maxwells** die Elektrostatik als Extremalfall der Elektrodynamik erscheinen lassen, ohne deren Geltung in ihnen zugesprochenen theoretischen Grenzbereichen in Abrede zu stellen. Denn, um Einstein zu zitieren, „es ist das schönste Los einer physikalischen Theorie, wenn sie selbst zur Aufstellung einer umfassenden Theorie den Weg weist, in welcher sie als Grenzfall weiterlebt.“ (s. **[2]**, S. 50)
Schließlich liegt die Bedeutung der obigen Schlussfolgerung auch in der Möglichkeit, Vorhersagen über das Verhalten der Lichtfortpflanzung in der Nähe großer Sterne zu treffen, da der Allgemeinen Relativitätstheorie zufolge in solchen Fällen tatsächlich eine deutlich wahrnehmbare Ablenkung der Lichtstrahlen auftreten muss, ein der Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie dienender und in dieser Hinsicht als entscheidend anzusehender Messeffekt, der vom Astronom **Arthur Eddington** am 30. Mai 1919 während der sich an diesem Tage ereigneten Sonnenfinsternis tatsächlich mit großer Genauigkeit hatte festgestellt werden können und im Unterkapitel **7b)** detaillierter diskutiert werden sollte.

3. Gravitationsgleichgewichts- und Kollapszustand

Es soll allerdings keinesfalls vermutet werden, dass allein die quantitativen Bestätigungen der Lichtstrahlbewegung die Bedeutung der Allgemeinen Relativitätstheorie in der modernen Astrophysik ausmachen, denn sie erweist sich als ein unersetzliches theoretisches Konzept, das, wie uns Unterkapiteln **7b)** und **7c)** noch nahe legen werden, die Rotverschiebung der Spektrallinien von denjenigen Galaxien vorhersagt, die sich nach **Edwin Hub-**

ble mit der ihrer Distanz zur Erde proportionalen Geschwindigkeit von unserem Sonnensystem entfernen, sowie die Perihelbewegung des Planeten Merkur eindrucksvoll expliziert. Vor allem Schwarze Löcher und Neutronensterne erlauben experimentelle Überprüfungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, deren Messresultate in der Umgebung solcher extrem massenreicher Körper deutliche Abweichungen gegenüber Newtonschen Ergebnissen vorweisen. Eben vom relativistischen Standpunkt aus wird die Stärke von Gravitationsfeldern charakterisiert durch den quadrierten Bruch $\beta = \left(\frac{v_A}{c}\right)^2$ **[2]**, der als das Verhältnis der Austrittsgeschwindigkeit v_A eines Körpers zur Lichtgeschwindigkeit c gedeutet werden darf. Im Falle verhältnismäßig kleiner Austrittsgeschwindigkeiten ($v_A << c$) gewährleistet das Newtonsche Gravitationsgesetz sehr präzise Vorhersagen über Gravitationsfelder betreffender Körper, wogegen in der Nähe des Grenzwertes $\lim_{v_A \to c} \left(\frac{v_A}{c}\right)^2 = 1$ **[2a]** die Allgemeine Relativitätstheorie bizarre und dramatische Effekte vermuten lässt, wie die bereits angeführte Eddingtonsche Lichtablenkung, die sich beispielsweise in der Nähe eines Schwarzen Loches noch deutlicher erkennen lässt, als dies bereits in unmittelbarer Sonnenumgebung möglich war.

Die Zeitdilatation, die bereits in der Speziellen Relativitätstheorie mathematisch abgeleitet und durch das Keating-Haefele-Experiment 1971 erfolgreich gemessen werden konnte, manifestiert sich als ein viel drastischeres Phänomen in der Allgemeinen Relativitätstheorie, vor allem in der Nähe äußerst massereicher astronomischer Objekte (Schwarze Löcher gehören natürlich zu den Hauptvertretern solcher extrem starke Gravitationseffekte bewirkender Massen, weswegen sie sich zu relativistischen Untersuchungsobjekten besonders eignen), denn spürbare Intensivierung des Gravitationsfeldes führt geradezu zur Konsequenz, dass für einen außerhalb stehenden Beobachter die Insassen dem starken Gravitationsfelde unterworfener Systeme einen „langsameren (verzögerten) Zeitlauf" ihrer Uhren im Vergleich zu seinem eigenen Zeitmessgerät registrieren müssten, eine Schlussfolgerung, deren theoretische Formulierung bereits der Speziellen Relativitätstheorie im Zuge der formalen Auseinandersetzung Einsteins mit dem sog. Bell'schen Problem entnommen werden konnte und ihn zusätzlich zur noch entschlosseneren Verallgemeinerung des speziellen Relativitätsprinzips inspiriert haben dürfte.

1916 gelang **Karl Schwarzschild** die Aufstellung der sog. Schwarzschild-Metrik, die das Verhalten von Gravitationsfeldern in der Umgebung sphärischer nichtrotierender Massen nach der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt, indem er davon ausging, dass Lichtstrahlen, im Gegensatz zu Newton, keinen Ellipsenbahnen folgen sondern sich vielmehr auf Spiralbahnen zum Massenzentrum des Schwarzen Loches, der sog. Singularität, bewegen würden. In diesem Singularitätspunkt, in dem die stärke des Gravitationsfeldes des Schwarzen Lochs unendlich wäre (vgl. hierzu auch die Ausführungen des Unterkapitels **5a)** unten), blieben Lichtstrahlen für immer gefangen, ohne jemals der Gravitationsanziehung entkommen zu können! Schwarzschild stellte sich demgemäss die Frage, was passieren würde, wenn sich Lichtstrahlen in der Nähe des Schwarzen Lochs bewegten und schlussfolgerte, die Wellenlänge des ausgesandten Lichtes müsste sich bei dessen genügend großer Annäherung an das Schwarze Loch vergrößern (sog. Rotverschiebung der Lichtwellenlänge), denn obwohl die Ergebnisse der Schwarzschild-Metrik im Falle sehr kleiner Geschwindigkeiten und schwacher Gravitationsfelder mit Newtonschen Vorhersagen elliptischer Bewegungsbahnen von physikalischen Körpern einwandfrei korrelieren, nimmt die Allgemeine Relativitätstheorie diese Bewegungsbahnen *nicht* als völlig elliptischer Form an (s. dazu Ausführungen im Unterkapitel **5f)**). Und selbst wenn man von elliptischer Gestalt kosmischer Bewegungsbahnen des Lichtes uneingeschränkt reden dürfte, wären die erwähnten Ellipsenbahnen Einstein zufolge nicht räumlich fixiert, wie wir es nämlich vom Newtonschen Weltbild her gewohnt sind, sondern die Richtung ihrer langen Halbachsen würde stufenweise rotieren.

Mit der Schwarzschild-Metrik geht freilich auch die Definition des Schwarzschildradius' r_{sch} einher. Diese ist allerdings mit dem Konzept der Raumkrümmung aufs engste verknüpft. Um dieses Konzept nachvollziehen zu können, schauen wir uns zwei Konzentrische Kreise in einer Ebene mit einer Radiusdifferenz *x*. Die Umfangsdifferenz der beiden Kreise betrüge, der euklidischen Geometrie zufolge, $2\pi\ x$. Wären die beiden Kreise auf dem Nordpol der Erde positioniert, dann ergäbe ihre Umfangsdifferenz einen Wert, der kleiner als $2\pi\ x$ wäre. Daher führt der Umstand, dass die Radiusdifferenz konzentrischer Kreise *x* kleiner oder größer ist als dieselbe in zweidimensionaler Ebene, von der Euklidischen Geometrie zu Geometrien von **Bernhard Riemann** (Geometrie auf „kugelförmig gekrümmten Flächen") und **Nikolai Lobatschewski** (Geometrie auf „sattelförmig gekrümmten Flächen"), die Einstein zufolge den Gravitationsfeldern in der räumlichen Umgebung sphärischer Körper zugrunde liegen sollen. Daher würde ein Beobachter, der sich auf der Oberfläche einer Massenkugel befände, eine von ihrem Radius unabhängige Stärke des Gravitationsfeldes messen, die mehr als nur, wie Newton annahm, viermal größer mit allmählicher Annäherung an das Massenzentrum werden könnte. Reduziert man allerdings die Radiuslänge allmählich, so gelangt man zu einem bestimmten verkleinerten Volumen der Kugelmasse mit einem fixen reduzierten Radiuswert, das visuell nicht mehr registrierbar wäre. Fährt man mit der Radiusreduktion fort, so erreicht man einen weiteren, noch kleineren Wert der Radiuslänge unserer nun sehr stark, ja beinahe zu einem Punkt geschrumpften „Kugelmasse“, deren Austrittsgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit gleicht. Im Gravitationsfelde beschriebener massenreicher, auf einen Punkt geschrumpfter Körper könnten somit Lichtstrahlen „eingefangen“ werden und wären nicht mehr in der Lage, der Anziehung desselben auszuweichen. Solche Körper werden als Schwarzschildsche Schwarze Löcher benannt, denn unter dem Einfluss ihrer Gravitationsfelder wird die oben angesprochene Rotverschiebung der Lichtwellenlänge unendlich und als solche nicht mehr wahrnehmbar für einen außenstehenden Beobachter, der den „Einfang“ von Lichtstrahlen seitens eines Schwarzen Loches begutachtet.

Der reduzierte Radius r_{sch} eines Kugelkörpers der Masse M, bei dem dieser „Einfang von Lichtstrahlen“ gerade geschieht und die Austrittsgeschwindigkeit v_A dieses „geschrumpften“ Kugelkörpers den Wert c erreicht, wird als der Schwarzschildradius bezeichnet und hat den Wert $r_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$ [3], wobei G natürlich für die Newtonsche Gravitationskonstante steht. Erstaunlicherweise erweist sich der Radiuswert $R = 1{,}50 r_{sch}$ [3a] als Grenzfall, bei dem Lichtstrahlen gerade noch um das Schwarzschildsche Schwarze Loch wie ein Satellit rotieren, und oberhalb dessen sie stets des Verlassens des Gravitationsfeldes eben dieses Schwarzen Lochs fähig sind. Bewegt sich allerdings ein Objekt mit der Geschwindigkeit $v < c$ oder aber auf einem Radius $r < R$ um das Schwarze Loch, so wird es von diesem „aufgesogen“, von der Stärke seines Gravitationsfeldes bis auf den Schwerpunkt zerquetscht und fällt unaufhörlich gen den Singularitätspunkt (den Massenzentrumspunkt des Schwarzen Lochs), ohne diesen jemals zu erreichen!

Alle eben geschilderten Überlegungen verleiteten **Robert Oppenheimer** 1939 zur Hypothese, Schwarze Löcher seien Sternenmassen, die auf einen Punkt schrumpften (in sich kollabierten oder implodierten). Diese Hypothese konnte sich zunächst nicht durchsetzen, da sich Physiker nicht mit der in der Allgemeinen Relativitätstheorie auftauchenden Singularität arrangieren konnten, die sie als Unvollständigkeit dieser Theorie selbst deuteten, da sie betrachtete Kugelmassen als idealisiert sphärisch annehme. Erst in den späten 1960er Jahren zeigten **Stephen Hawking** und **Roger Penrose**, dass die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins stets zur Singularität beim Sternenkollaps führt, selbst dann, wenn die kollabierenden Sterne keine ideale Kugelsymmetrieform aufweisen. Denn sogar in solchen Fällen wird die eventuelle Asymmetrie der Sternmasse durch das Aussenden von Gravitationswellen eliminiert und es entstehen immer Schwarze Löcher. Die aus der Asymmetrie der Sternenkugelform hervorgegangenen Gravitationswellen können als „Verzerrung“ (sich radial vom Schwarzen Loch ausbreitende Schwingungen) der „Gravitationsfeldmembran“ aufgefasst werden. Sie ermöglichen dem entstehenden Schwarzen Loch den für es energetisch günstigsten stationären Zustand in der Raumzeit einzunehmen, sodass dieses Schwarze Loch lediglich durch Registrierung von propagierenden Gravitationswellen „aufgespürt“ und, wie schon gesagt, nie visuell erkannt werden kann (s. hierzu Unterkapitel **6c)** und **6d)**).

Im stationären Zustand lässt sich das Schwarze Loch also lediglich indirekt, nämlich als Quelle des externen Gravitationsfeldes erkennen, in dem sich aus dem Sternenkollaps resultierende Gravitationswellen ausbreiten, und dieses Gravitationsfeld wird durch zwei Quantitäten, die Masse M des Schwarzen Lochs sowie dessen Spinrate, ausreichend charakterisiert. Die Beschreibung des Umgebungsraumes von Schwarzen Löchern erfordert daher unbedingt die Berücksichtigung der Rotation dieser Schwarzen Löcher um ihre Hauptachsen, und da die Schwarzschild-Metrik dieser Forderung nicht genügt (denn sie erfasst, wie oben hervorgehoben, lediglich Umgebungsräume nichtrotierender Schwarzer Löcher), wurde ihr Gültigkeitsbereich in der Form einer nach **Roy Kerr** benannten Kerr-Metrik auf rotierende Schwarze Löcher erweitert.

Nun wollen wir uns mit dem Grund für die Entstehung von Schwarzen Löchern befassen, denn die Existenz eines massenreichen Körpers im Raume garantiert allein keinesfalls die Entstehung von Schwarzen Löchern, und selbst wenn man der Oppenheimerschen Deutung unter Einführung des Sternkollapses folgen sollte, so muss zunächst geklärt werden, wie es zu einem derartigen Sternenkollaps kommt, was ihn verhindert bzw. ermöglicht. Wir haben Schwarze Löcher bereits als massenreiche in sich kollabierte Sterne definiert. Wodurch erfolgt allerdings der Kollaps eines Sterns? Da Schwarze Löcher auch einen Extremfall repräsentieren, in dem die Gravitationskraft alle übrigen drei Fundamentalkräfte übertrifft, liegt selbstredend die Vermutung nahe, die Gravitationskraft werde im Zustande solcher Sterne, die sich (noch) nicht zum Schwarzen Loch entwickelt hatten, durch eine der restlichen drei Fundamentalkräfte *kompensiert*, sodass es zu einem Kräftegleichgewicht komme. Dieses Gravitationsgleichgewicht, das die gegenseitige attraktive Wirkung der Gravitationskraft zwischen sehr großen Körpern (wie Sternen, Planeten, Galaxien und anderen kosmischen Objekten) und den dispersiven Einfluss beispielsweise der Druck- und Bewegungsverhältnisse zahlreicher Teilchen in ihrem Inneren ausbalanciert, ist von entscheidender Bedeutung für das Verständnis der Expansion unseres Universums.

Die Gravitation wird allerdings erst auf großen Entfernungen und unter makroskopischen, massereichen Körpern „wahrnehmbar“, auf mikroskopischem Bereiche (beispielsweise unter Atomen) darf man sie hingegen völlig vernachlässigen. Betrachten wir zunächst unsere Sonne: sie wird, ebenso wie Planeten, durch Gravitation zusammengehalten, wodurch ihr eine fast kugelförmige Form verliehen wird, denn die Gravitation trachtet danach, alle Körper auf einen ihnen gemeinsamen Schwerpunkt zusammenzuziehen. Gäbe es keine Kompensation der Gravitationskraft durch gegenseitigen Druck einzelner Körperteile untereinander sowie auf der Basis einer Kernfusion des Wasserstoffs zu Helium in ihrem Inneren, so hinderte nichts die Gravitationskraft daran, die konstant bleibende Sonnenmasse auf ein sehr kleines Punktvolumen zusammenzuziehen, bis ein für diesen „Kompressionsprozess" charakteristischer stationärer Zustand erreicht wird, in dem das „Zusammenziehen" der Sonne zum abgekühlten „Weißen Zwerge" automatisch aufhört. Dass die Sonne nicht zum Schwarzen Loch wird, verdanken wir dem Umstand, dass ihre Massenkonzentration, obwohl für entsprechende Verhältnisse innerhalb unseres Sonnensystems enorm, nicht hoch genug ist, um die Schwarzschildschen Bedingungen **[2a]**, **[3]** bzw. **[3a]** zu erfüllen.

Die Verwandlung der Sonne in einen Weißen Zwerg geschieht allerdings auch (noch) nicht, da außer dem gegenseitigen Druck einzelner Körperbereiche der Sonne vor allem, wie bereits akzentuiert, hohe Temperaturen im Inneren dieses natürlichen Kernreaktors herrschen, die die chaotische Bewegung zahlreicher Atome und Moleküle aufrechterhalten, und somit der zusammenziehenden Wirkung standhalten (ihr also entgegendrücken). Stellen wir uns vor, was passierte, wenn diese chaotische Teilchenbewegung im Sonneninneren unter sehr hohen Temperaturen, wobei Temperatur thermodynamisch und statistisch nichts anderes sein sollte als die mittlere kinetische Energie aller betrachteten Teilchen, gegenüber der Gravitation die Oberhand behielte – die Sonne würde natürlich in zahllose Teile auseinander fliegen, genauso wie es nach dem Big Bang mit dem ganzen Universum geschah!

Da bisher keines der beiden „Extremalszenarien" aufgetreten hatte, betrachtet man die Sonne als sich im Gravitationsgleichgewichtszustand befindlich. Der Effekt des Gravitationsgleichgewichtes dürfte also mit dem Kreisen eines Satelliten um die Erde in Analogie stehen und einzelne Sterne sind, wie **Mitchell Begelman** und **Martin Rees** bemerken (s. **[1]**, S. 15), demnach „Atome" von Galaxien. Irgendwann wird die Reaktoraktivität der Sonne zweifellos zum Erliegen kommen, ihr wird also, um es salopp zu sagen, der „Treibstoff ausgehen". Jedoch statt sich abzukühlen wird die Sonnenoberfläche zunächst immer wärmer, denn sie ist schließlich diejenige, die sich, schrumpfend, gegen die Gravitationskraft noch zu behaupten hat und dies nur durch Erhöhung der eigenen Temperatur aufgrund kontinuierlich ausströmender Wärme aus dem Sonneninneren zu erreichen vermag. Dieses Phänomen, dem zufolge der Energieverlust zur Erwärmung von Körpern und nicht zu deren Abkühlung führt, erweist sich als allen Gravitationssystemen eigen.

Kehren wir jedoch noch einmal zu unserer nun „inaktiven" Sonne zurück: die Gravitationskraft wird mittlerweile immer stärker und versucht unaufhörlich, die Sonne zu ihrem Schwerpunkt zusammenzuziehen. Infolgedessen schrumpft diese, wie angedeutet, zu einem Weißen Zwerg und kühlt erst dann endgültig ab, womit der Prozess ihres „Gravitationstodes" als abgeschlossen betrachtet werden dürfte. Es aber auch möglich, den „Gravitationstod" weiter zu verfolgen. Man müsste hierzu lediglich einen noch massereicheren Stern als unsere Sonne auswählen, um zu sehen, dass der Prozess des „Gravitationstodes" vom Zustande des Weißen Zwergs bis zum Schwarzen Loch fortschreiten kann, denn die Gravitationskraft wird den kollabierenden Stern immer konsequenter „schrumpfen" lassen, bis Schwarzschildsche Bedingungen erfüllt und das derart entstandene Schwarze Loch lediglich dadurch erkennbar wird, das sich von ihm aus Gravitationswellen entlag der „Membran" des ihn umgebenden Gravitationsfeldes radial ausbreiten, ohne dass seine visuelle Auseinanderhaltung jemals erfolgt. In manchen Fällen kann der Vorgang des Zusammenziehens eines Weißen Zwergs beim Zustande eines noch kleineren Neutronensterns anhalten, häufiger wird es sich jedoch ereignen, dass auch diese letzte „Kompressionsbarriere" überschritten wird und der „Gravitationstod" des kollabierenden Sterns in einem Schwarzen Loch das endgültige Endstadium erreicht, was die Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie in solchen Entwicklungsphasen der Gravitationswirkung auf astronomische Objekte auch fordert.

4. Die Suche nach Schwarzen Löchern

Obzwar die Allgemeine Relativitätstheorie nicht die einzige Theorie ist, die die Möglichkeit der Entstehung Schwarzer Löcher einräumt, so ist sie tatsächlich diejenige theoretische Konzeption, die den Prozess des Gravitationstodes am detailreichsten und genauesten beschreibt und ihn in den gesamten Nexus kosmologischer Entwicklung unseres Universums am befriedigendsten einbettet. Daher liegt einer der Motivationsgründe für die Erforschung und Suche nach Schwarzen Löchern in der Tatsache, dass sie als Objekte, in deren Umgebung die Gravitationseinflüsse diejenige aller anderen Fundamentalkräfte überragen, die experimentelle Überprüfung von Vorhersagen aller vorhandenen Gravitationstheorien und damit auch der Allgemeinen Relativitätstheorie selbst gestatten. Des Weiteren scheint es auch relevant zu sein, dass Schwarze Löcher, als kollabierte und von dem Reste des Universums hermetisch abgeschlossenen Objekte tatsächlich als eine Art semipermeabler Membran interpretiert werden dürfen, in die es möglich ist zu fallen, ohne dass es die in ihrem Inneren verlorengegangenen Körper jemals wieder verlassen, da selbst Lichtstrahlen in der Singularität „gebündelt" werden und ihr nicht entkommen können.

Wie es im Singularitätspunkte physikalisch „aussieht" mag zum gegenwärtigen Stande der physikalischen Erkenntnis dahingestellt bleiben. Denn offenbar herrschen im Singularitätspunkt des Schwarzen Lochs Bedingungen, die, ähnlich dem Versuche, die ersten Sekundenbruchteile nach dem Big Bang physikalisch zu entziffern, nur durch eine konstruktive Vereinigung der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der Quantentheorie gedeutet

werden können, ein Vorhaben mit dem Ziele der Generierung einer alle Fundamentalkräfte erfassenden Supertheorie, das sich allen bisherigen Realisierungsbemühungen Einsteins und seiner Nachfolger entzog.
Für Physiker dürften Schwarze Löcher auch wegen neuer, durch ihre Untersuchung erzielbarer Informationen über die Struktur des Raumes eine gravierende Rolle spielen, da Lichtstrahlen unter den ihnen innewohnenden extremen Gravitationsbedingungen neuartige Bewegungsbahnen verfolgen, deren genauere mathematische Charakterisierung auch menschliche Realitätsvorstellung von Raum und Zeit revolutionieren und uns letzten Endes vielleicht sogar der Antwort auf die Frage philosophischer Konnotation näher bringen könnte, wie es denn möglich ist, dass ein derart „schmutziger“ Vorgang des „Gravitationstodes“ dennoch einem „hygienisch sauberen“ stationären Zustande eines sich durch propagierende Gravitationswellen bekannt gebenden Schwarzen Lochs irreversibel entgegenstrebt, um in diesem schließlich zu enden.

5. Sterne auf relativistischen Bewegungsbahnen

(a) Verhalten von Uhren und Maßstäben auf rotierenden Bezugskörpern

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie verursacht die Anwesenheit des nicht weiter ignorierbaren Gravitationsfeldes um gegenüber einem Galilei-Koordinatensystem K beschleunigt bewegte Nicht-Inertialsysteme K’ herum erhebliche Komplikationen, wenn es darum gehen sollte, den räumlichen sowie zeitlichen Messangaben einen rationalen mathematischen Definitionssinn zu verleihen, der den Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen der von Gravitationseinflüssen unabhängigen Speziellen Relativitätstheorie entnommen werden könnte. Bevor man allerdings an diese keinesfalls a priori lösbare Aufgabenstellung mathematisch herangeht, scheint es nützlich zu sein, sich erneut eben dem bereits als bekannt voraussetzbaren Charakter von Koordinatentransformationen der Speziellen Relativitätstheorie möglichst konzise zuzuwenden.
Wir wissen nämlich, dass im Bereiche der Klassischen Mechanik, in dem Geschwindigkeiten physikalischer Körper bedeutend kleiner als die Lichtgeschwindigkeit angenommen werden dürfen, zwischen zwei Inertialsystemen [dreidimensionalen Koordinatensystemen mit (x, y, z)- bzw. (x’ ,y’, z’) – Achsensätzen] K und K’, von denen eines, beispielsweise K, als Bezugssystem gewählt wird, gegenüber dem sich K’, dem Galileischen Relativitätsprinzip Genüge tuend, parallel in positive Richtung der x-Achse von K geradlinig gleichförmig zu bewegen hat, immer die sog. Galilei-Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \wedge z' = z \\ t' = t \end{array}\right\} \quad [4]$$

gelten, die im Zuge der relativistischen Betrachtung der der Lichtgeschwindigkeit c betragsmäßig nahe kommenden Körpergeschwindigkeiten v in die die Koordinaten beider Systeme K und K’ in Beziehung setzende Lorentz-Transformation der Form

$$\left.\begin{array}{l} x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \wedge z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta x}{c}\right) \end{array}\right\} \quad [4a] \text{ mit } \beta = \frac{v}{c} \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

übergehen. Mit der mathematischen Herleitung dieses Transformationsübergangs wollen wir uns nicht näher befassen, sondern beabsichtigen es, uns mit der Feststellung zu begnügen, dass die Lorentztransformation, die ja aufgrund der Raumisotropie sowie der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen Informationen über die Zeitdilatation sowie die Längenkontraktion beinhaltet, der transformationsinvarianten Quadrikenidentität

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(ct\right)^2 = \left(x'^2\right) + \left(y'^2\right) + \left(z'^2\right) - \left(ct'\right)^2 \quad [4b]$$

genügen muss. Dies bedeutet wiederum, dass man die Lorentztransformation verallgemeinert derart charakterisieren darf, dass sie die Koordinaten durch derartige homogene Funktionen von ausdrückt, sodass die obige Identitätsrelation [4b] gewahrt bleibt.
Dieselbe verallgemeinerte Charakterisierung der Lorentztransformation lässt sich freilich auch dadurch erzielen, dass man das vierdimensionale Raumzeitkontinuum mittels der Einführung eines zweidimensionalen Minkowski Diagramms zu beschreiben trachtet und sich zu diesem Zwecke sowohl einer Invarianz der y und z-Achsen des dreidimensionalen Raumes gegenüber der Längenkontraktion und Zeitdilatation einer in der Richtung der x-Achse des Systems K erfolgenden Bewegung als auch der imaginären Zeitkoordinate $\sqrt{-1}ct$ statt des gewöhnlichen Zeitkontinuums t bedient. Setzt man also für K

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= \sqrt{-1}ct \end{aligned}\right\}$$ **[4c]** fest (analoge Festsetzung gilt natürlich auch für Zeitkoordinaten x'_1, x'_2, x'_3 und x'_4 des Systems K'), so darf die obige lorentzinvariante Identität **[4b]** auch in der Form

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4$ **[4d]** ausgedrückt werden.

Man erkennt also, dass Minkowski-Diagramme durch den „räumlichen" Koordinatenachsen entsprechende Behandlung der Zeit als eines gleichwertigen Kontinuums die Beschreibung physikalischer Phänomene mittels vier anzugebender Koordinatenwerte innerhalb eines vierdimensionalen euklidischen Raumes mit imaginärer Zeitkoordinate gestatten, eines vierdimensionalen Raumes also, in dem die Lorentz-Transformation einer „Drehung" der Koordinaten in dieser vierdimensionalen Welt entspräche.

Erst jetzt dürfen wir uns der Problematik der Zeit- und Längenmessung in der Allgemeinen Relativitätstheorie erneut annehmen. Dazu stelle man sich zunächst ein Galileisches Koordinatensystem K (Galileischen Bezugskörper) vor, das sich in einem raum-zeitlichen Gebiete befinde, indem aufgrund des K eignenden, passend gewählten Bewegungszustands selbst kein Gravitationsfeld existieren möge (es sollen also relativ zu K die Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie an ihrer Geltung nichts einbüßen). Des Weiteren denke man sich das nämliche Gebiet nun auf einen zweiten Bezugskörper K' (beispielsweise eine ebene, um den eigenen Mittelpunkt gleichmäßig rotierenden Kreisscheibe) bezogen, der relativ zu K gleichförmige Rotation durchführen solle. Auf der ebenen Kreisscheibe K' habe schließlich ein Beobachter exzentrisch zu sitzen. Dieser Beobachter würde die Wirkung einer radial nach außen gerichteten Kraft spüren, die seitens eines relativ zum ursprünglichen Bezugskörper K ruhenden Beobachters als <u>Zentrifugalkraft</u> (Trägheitskraft) interpretiert werden könnte. Eine derartige Deutung dieser Radialkraft vom Beobachter in K würde den auf der Kreisscheibe K' Sitzenden nicht davon abhalten können, sein eigenes Bezugssystem (die Kreisscheibe als ruhend anzusehen und die Bewegung der Körper um ihn herum dem Einflusse eines entsprechenden Gravitationskraftfeldes zuzuschreiben, denn auf der Basis des Äquivalenzprinzips ist er zu einer derartigen Vermutung auch berechtigt, ungeachtet der Tatsache, dass ein Gravitationskraftfeld, welches der Beobachter in K' zur Klärung seiner Lage heranziehen würde, die Eigenschaft hätte, im Scheibenmittelpunkt zu verschwinden und nach außen hin proportional der Abstandsvergrößerung von diesem Mittelpunkt zuzunehmen, womit es nach Newtonscher Gravitationstheorie nicht existieren dürfte.

Nun versucht der Beobachter auf der Kreisscheibe verlässliche Zeitmessungen dadurch zu erzielen, indem er eine Uhr im Mittelpunkte der Kreisscheibe, die andere gleichbeschaffene an ihrer Peripherie positioniert, sodass die beiden Uhren bezüglich des Systems K' ruhen. Welche Ergebnisse wird dieser Beobachter in K' feststellen? Wir können diese Frage nur dadurch beantworten, indem wir uns in die Rolle des Beobachters aus K hineinversetzen und die Bewegung von K' eingehender betrachten, denn beim ganzen Beobachtungsakt hat man ausschließlich das Galileische nicht rotierende System K als Koordinatenbezugskörper zu verwenden, da nur relativ zu K die Validität der Resultate der Speziellen Relativitätstheorie angenommen werden dürfte, wogegen um K' herum, wie bereits oben akzentuiert, ein Gravitationsfeld herrscht. Wir fragen uns nun, vom Standpunkte eines Beobachters aus K aus, ob die Uhren in K' gleich schnell gehen und werden beim genaueren Hinsehen gezwungen zu konstatieren, dass die Uhr im Scheibenmittelpunkt keine Geschwindigkeit hat, während sich die Uhr an der Scheibenperipherie infolge der Rotation von K' von unserem System K wegbewegt und der Speziellen Relativitätstheorie zufolge eine Zeitverzögerung (Zeitdehnung) gegenüber der Zeitmessung der Uhr im Kreisscheibenmittelpunkt vorweisen müsste (d.h. die „Peripherieuhr" sollte dauernd langsamer laufen als die „Mittelpunktsuhr"!). Dieser Zeitdilatationseffekt entspricht genau der im Unterkapitel **3** diskutierten vom sich verstärkenden Gravitationsfelde verursachten Zeitdilatation und verursacht subtile Probleme, den Gleichzeitigkeitsbegriff zu definieren.

Jedoch nicht nur eine präzise Definition der Gleichzeitigkeit fällt in der Allgemeinen Relativitätstheorie, über die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie urteilend, hin, auch die entsprechende Definition von Längen und räumlichen Koordinaten schlechthin erweist sich zunächst als absurd und nicht aufstellbar. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die gleichen Systeme K und K' von vorhin. Der Beobachter auf der Kreisscheibe K' beabsichtigt dieses Mal Längen zu messen und positioniert einen starren Stab tangential zur Scheibe (also in Bewegungsdrehrichtung derselben). Dem Längenkontraktionssatz der Speziellen Relativitätstheorie folgend beurteilt jetzt der Beobachter aus K, der starre Stab erfahre in K' eine Längenkontraktion (Längenverkürzung), wogegen derselbe Stab, radial auf der Kreisscheibe aufgestellt, keiner Längenkontraktion unterliegen dürfte, da zur Bewegungsrichtung vertikale Strecken ihrer Länge nach unverändert bleiben. Alles bisher über Längenmessung Gesagte hat allerdings ernsthafte Konsequenzen für die Raumgeometrie solcher Raumgebiete, in denen die Wirkung des Gravitationsfeldes nicht vernachlässigt werden kann. Denn das Verhältnis des Kreisumfangs und Kreisradius', das in euklidisch geprägten, dem Galileischen Bezugskörpern zugrundeliegenden Koordinatensystemen bekanntlich π beträgt und zur Aussage führt, die Summe aller inneren Winkel eines Dreiecks sei 180°, ist

im Falle hier betrachteter rotierender, der Gravitationskraft unterliegender Nicht-Inertialsysteme kleiner als π , was der das System K' prägenden Geometrie einen nicht-euklidischen bzw. Riemannschen Charakter zuspricht, denn die Winkelsumme aller Innenwinkel eines Dreiecks, die größer als 180° sein sollte, was hinsichtlich der betrachteten rotierenden Kreisscheibe und des mit ihr identifizierten Systems K' zweifellos zutrifft, deutet auf die Relevanz einer nicht-euklidische Geometrie positiver Krümmung. Eine derartige nichteuklidische Geometrie müsste also auf positiv gekrümmten Flächen, den sog. „Riemannschen Kugeln", betrieben werden.
Hiermit wurde bewiesen, dass die Sätze euklidischer Geometrie auf rotierenden Kreisscheiben bzw. im Allgemeinen in allen Gravitationsfeldern *nicht* uneingeschränkt gelten können, zumindest wenn man dem oben betrachteten starren Stabe die Einheitslänge zuordnet, denn dann verlieren sowohl die Zeit- und Ortsmessung als auch Naturgesetze, die eben durch diese Raum- und Zeitkoordinaten (x, y, z und t) gedeutet werden sollen, jeglichen exakten Sinn. Dieser Missstand lässt sich nur durch einen gezielten mathematischen Ausbau der euklidischen Geometrie beheben, und zwar in der konzeptionellen Tradition des genialen **Carl Friedrich Gauß'**, der nachzugehen wir uns demnächst vornehmen wollen. Diesem Vorhaben sollen jedoch zunächst einige Überlegungen über den Kontinuumsbegriff vorangehen.

(b) Euklidisches und nicht-euklidisches Kontinuum

Das Kontinuum impliziert die Möglichkeit, eine Ganzheit und deren Teilbereiche unendlich oft in kleinere Teilbereiche (zusammenhängende Teilgebiete derselben) aufzuteilen. Denn wir dürften sagen, die Oberfläche sei ein Kontinuum, wenn ich von irgendeinem Punkte derselben zu irgendeinem anderen dadurch gelangen kann, indem ich mehrmals durch die Wahl einer entsprechenden Messeinheit, die beliebig verkleinert werden darf, immer zu einem „benachbarten" Punkte übergehe, ohne „Sprünge" zu machen (ohne dass also meine „Messwegkurve" Unstetigkeitsstellen aufweist).
Stellen wir uns nun die glatte Oberfläche eines Marmortisches vor. Über diese Fläche breiten wir ein „Quadratnetz" aus, dessen Quadrate dadurch entstehen, dass man deren Seiten durch starre deckungsgleiche „Einheitsstäbchen" herstellt, sodass jede zum Netzinnere gehörende Quadratseite zu zwei Quadraten und jede im „Netzinneren" festgelegte Quadratecke zu vier Quadraten gehört und damit auch die ganze Tischplatte mit Quadraten belegt ist. Lässt sich die hiermit beschriebene „Belegung" der Tischplatte mit dem „Quadratnetz" einwandfrei durchführen, d.h. darf die Krümmung der Fläche überall als verschwindend klein betrachtet werden, so sagt man, die Punkte der Tischplatte bilden ein „euklidisches Kontinuum" mit Bezuge auf das verwendete starre Stäbchen als dessen Einheitsstrecke. In einem so konstruierten Quadratnetz kann man stets eine Quadratecke als Anfangspunkt wählen und zu jeder beliebigen Quadratecke gelangen, indem man in eine der beiden möglichen Richtungen (Dimensionen) fortschreitet. Führt man noch dazu, wie **Cartesius**, geeignete rechtwinklige Koordinaten ein, als deren Ursprung man, obwohl nicht zwingend, auch den „Anfangseckpunkt" unserer Bewegung wählen darf, so kann man geeichte Koordinaten aller Orte der Tischplatte, die man der Einfachheit halber auch als unendlich betrachten dürfte, durch zwei Zahlenwerte festhalten, die mir genau angeben, wie viele „Einheitsstäbchen" ich nach „oben" oder „unten" vom „Anfangspunkt" zurücklegen muss, um zur erwünschten Quadratecke des „Netzes" zu gelangen. Dieses Zahlenwertepaar wird dann als „kartesisches Koordinatenpaar" des die „Anfangs-" und „Endecke" unseres Weges verbindenden Ortsvektors mit Bezug auf das durch die gelegten „Eichungsstäbchen" bestimmten „kartesischen Koordinatensystems".
Was passiert allerdings, wenn man unsere Tischplatte samt des „Quadratnetzes" in der Mitte erwärmt? Die Fläche wird „gekrümmt", die zuvor starren Stäbe werden jedoch ebenfalls deformiert (gedehnt), die der Tischplattenmitte am nächsten angelegten „Einheitsstäbchen" stärker als diejenige am Tischplattenrande positionierten, sodass man sich nun vom Begriffe des „euklidischen Kontinuums" loslösen muss. Denn man kann die Einheitsstrecke zwischen zwei Punkten nicht länger als starr definiert, da sie temperaturabhängig wäre und vom Tischplattenbereiche jeweils eine andere Festlegung erführe. Denn wie soll man eine Strecke anders definieren, als die Verbindung von zwei Punkten mittels eines (deformierten oder starren) „geeichten Stabes", sodass die Stabenden mit den beiden Punkten exakt zur Deckung kommen. Wie man unschwer erkennt, zwingen diese Gedankengänge die Konzeption einer neuen nicht-kartesischen Koordinatenmethode auf, welche die Gültigkeit der euklidischen Geometrie für starre Körper (Eichstäbe) nicht voraussetzen, sie allerdings als einen idealisierten Grenzfall perfekter, nicht verformbarer „Einheitsstäben" erfasst, und entsprechen der bereits im Unterkapitel **5a)** nahegelegten Problematik der Längen- und Zeitmessung in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wir wollen uns in bevorstehendem Unterkapitel ansehen, wie Gauß mit der Charakterisierung „gekrümmter" Koordinatensysteme mathematisch fertig wurde und der Einsteinschen Gravitationstheorie zumindest in diesem Deutungsaspekte um ein Jahrhundert vorausging.

(c) Gaußsche Koordinaten

Das im letzten Unterkapitel geschilderte „Koordinatenproblem" trat Gauß in Form folgender Überlegung entgegen: Sei im euklidischen dreidimensionalen metrischen Raume beispielsweise die Oberfläche eines Ellipsoids vorhanden, so lässt sich auf ähnliche Art des Anlegens eines elastischen Quadratnetzes, wie oben ausgeführt,

eine zweidimensionale Geometrie definieren, die ihrer kartesischen Version mathematisch formal in Nichts nachsteht. Ignoriert man zunächst die Tatsache, dass sich das Ellipsoid in einem dreidimensionalen euklidischen Kontinuum befindet und fokussiert sich lediglich auf dessen zweidimensionale Oberfläche, so hindert einen nichts daran, auf dieser Oberfläche, die wir nun ebenso als eine Tischplattenfläche betrachten dürften, dieselben „Netzkonstruktionen“ starrer Stäbe auszuführen, wie wir dies im letzten Kapitel taten. Allerdings wird eine solche „Netzkonstruktion“ unbedingt anderen geometrischen Gesetzmäßigkeiten genügen, statt den bisher behandelten zweidimensionalen geometrischen Prinzipien **Euklid**s. Somit wäre auch die in Auge gefasste Ellipsenoberfläche bezüglich unserer „Einheitsstäbchen“ kein euklidisches Kontinuum mehr, womit sich in ihr auch keine kartesischen sondern lediglich Gaußsche Koordinaten prinzipiell definieren ließen.
Es ist freilich kein Geheimnis, dass Gaußsche Koordinaten eine Verallgemeinerung kartesischer Koordinatenmethoden auf beliebig gekrümmte Oberflächen verkörpern sollen, denn Gaußsche Überlegungen, wie man geometrische Verhältnisse in einer Fläche allgemein behandeln kann, wiesen den Weg zur späteren geometrischen Behandlung mehrdimensionaler, nicht-euklidischer Kontinua **Bernhard Riemann**s.
Die geometrisch-analytische Behandlungsweise des Kontinuums kann im Gaußschen Sinne dadurch erzielt werden, dass man sich auch auf unserer „glatten“ Tischplatte ein System beliebig gekrümmter Kurven aufgezeichnet denkt, die wir als *u*-Kurven bezeichnen wollen und die der Einschränkung unterliegen, sich trotz ihrer Krümmung *nicht* gegenseitig zu schneiden (denn die Orthonormalitätseigenschaft von Einheitsvektoren ist das Mindeste, was man einem Koordinatensysteme abzuverlangen hat, dies war zweifellos bereits Gauß intuitiv klar). Über dieses Kurvensystem auf der Tischplatte wird ein weiteres System beliebig gekrümmter *v*-Kurven gelegt, wobei auch dieses System der Orthonormalitätsbedingung zu genügen und somit das gegenseitige Schneiden seiner Kurven zu verhindert hat (es sei mit starkem Nachdruck darauf hingewiesen, dass im Ausdrucke „beliebig gekrümmt“ auch kartesische Koordinaten als Sonderfall solcher Koordinatenkurvensysteme mit verschwindender „Krümmung“ enthalten sind). Des Weiteren haben sich die beiden aneinandergelegten Kurvensysteme im rechten Winkel zueinander zu schneiden, sodass man, wenn ein Anfangspunkt (Ursprung) unseres Gaußschen Koordinatensystems sowie ein entsprechender „Eichungsmaßstab“ seiner „krummlinigen Koordinaten“ festgelegt ist, man lediglich nach oben bzw. unten oder nach links bzw. rechts zu zählen hat, um den genauen Ort eines Punktes in diesem Koordinatensystem genau angeben zu können (natürlich impliziert bereits die Bedeutung des Worts Kontinuum, dass eine mathematisch genau festlegbare Ortsangabe aufgrund der Möglichkeit unendlicher Abstandsteilbarkeit in der physikalischen Realität prinzipiell versagt, dieser Umstand soll uns allerdings im Rahmen vorstehender Betrachtungen allerdings kaum stören).
In diesem Koordinatensystem von *u*- und *v*-Kurven, die, um der mathematischen Idealisierung treu zu bleiben, unendlich dicht die ganze Tischplatte überdecken sollen, sodass durch jeden Punkt dieser Tischplatte eine und nur eine *u*- bzw. *v*-Kurve durchgeht, sollen also alle Tischplattenpunkte als gegenseitige Schnittpunkte eben dieser Kurven gedeutet werden. Somit hätte ein Punkt P der Tischplatte, der z. B. als Schnittpunkt der, vom Ursprung unseres Gaußschen Koordinatensystems aus gesehen, dritten *u*- bzw. ersten *v*-Kurve entsteht, die (Gaußschen) Koordinaten $u = 3$ und $v = 1$. Demgemäß entsprächen zwei benachbarten Punkten P und P’ auf der Fläche die Koordinaten

$$\begin{aligned} &P:(u;v) \\ &P':(u+du;v+dv) \end{aligned} \quad \text{[I]},$$

wobei du und dv als Differentiale sehr kleine Abstandsbewegungen entlang von *u*- und *v*-Kurven andeuten sollen. Daher ist der gemessene Abstand ds von P und P’ ebenfalls sehr klein und es steht für Gauß fest, dass man diesen Abstand allgemein in der Form einer Quadrik

$$ds^2 = g_{11}(u;v)\,du^2 + 2g_{12}(u;v)\,dudv + g_{22}(u;v)\,dv^2 \quad \text{[II]}$$

beschreiben kann, wobei $g_{11}(u;v)$, $g_{12}(u;v)$ und $g_{22}(u;v)$ Größen sein sollen, die in einer genau festgelegten Weise von *u* und *v* abhängen und dadurch das Verhalten von „Einheitsstäbchen“ relativ zu *u*- und *v*-Kurven sowie relativ zur Tischoberfläche selbst bestimmen. Bilden die Punkte einer betrachteten Oberfläche bezüglich angelegter „Eichungsstäbchen“ ein euklidisches Kontinuum, so können in diesem und wirklich *nur* in diesem Falle, die *v*- bzw. *u*-Kurven derart gezeichnet werden, dass $g_{11}(u;v) = g_{22}(u;v) = 1$ bzw.

$g_{12}(u;v) = 0$ gilt und sich für ds der einfache, uns wohl vertraute Abstandsausdruck $ds^2 = du^2 + dv^2$ **[III]** als einfachste mögliche Quadrikform ergibt.
Nur in der euklidischen Geometrie sind also *u*- und *v*-Kurven gerade Linien, die aufeinander senkrecht stehen. Diese Eigenschaft lässt sich äußerst eindeutig dem Skalarprodukt von Vektoren entnehmen, das sogar als bezüglich der Rotation oder eines anderen Transformationstyps eines Gaußschen Koordinatensystems invariant betrachtet werden darf. Denn **[II]** darf, nimmt man Größen *ds*, *du* und *dv* als Vektoren an, auch geschrieben werden als

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{11}(u;v)}du + \sqrt{g_{22}(u;v)}dv \right)^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = g_{11}(u;v)\,du^2 + \underbrace{2\sqrt{g_{11}(u;v)}\sqrt{g_{22}(u;v)}dudv}_{\equiv 2g_{12}(u;v)} + g_{22}(u;v)\,dv^2 \quad \textbf{[IV]}.$$

Wegen der positiven Definitheit des Skalarproduktes, müssen du^2 und dv^2 ungleich Null sein. Dagegen kann das „Skalarprodukt" $dudv$ auch als $dudv = |du||dv|\cos\gamma$ geschrieben werden, und da der Winkel γ zwischen euklidischen Koordinatenachsen ein rechter ist ($\gamma = 90$), ergibt sich automatisch $dudv = 0$, womit die Identität **[III]** aus der allgemeinen Beziehung **[II]** abgeleitet wurde.

Man sieht also, dass kartesische Koordinaten in der Tat als ein Sonderfall der Gaußschen Koordinaten betrachtet werden dürfen und Gaußsche Koordinaten an sich nichts anderes sind denn eine Zuordnung von zwei Zahlen zu den Punkten einer betrachteten Fläche, und zwar derart, dass räumlich benachbarten Punkten wenig verschiedene Zahlenwerte zugeordnet sind. Und selbst wenn sich *u*- und *v*-Kurve nicht unter einem rechten Winkel schneiden sollten, so verhielte sich das krummlinige Gaußsche Koordinatensystem auf unserer Tischplatte in sehr kleinen „Tischplattengebieten" dennoch als eines dem kartesischen Koordinatensystem ebenbürtig, da dann das „Skalarprodukt" $dudv$ aus **[IV]** zwar ungleich Null und dennoch als äußerst klein zu ignorieren wäre, womit man aus **[II]** erneut **[III]** erhielte. Denn Gauß hat offenbar eine der mathematischen Behandlung beliebig dimensionaler und geformter Kontinua fähige Koordinatendarstellungsmethode erfunden, in denen metrische Beziehungen (vergegenwärtigt als „Abstand" benachbarter Punkte) definiert werden können. Jedem Punkte des Kontinuums werden so viele Zahlen (Gaußsche Koordinaten) zugeordnet, als das betreffende Kontinuum Dimensionen hat, wobei eine derartige Zuordnung unter Wahrung eigener Eindeutigkeit sowie der Berücksichtigung der Tatsache erfolgt, dass benachbarten Punkten, der Kontinuumshypothese gemäß, unendlich wenig verschiedene Zahlen (Gaußsche Koordinaten) zuzuordnen sind.

Das Gaußsche Koordinatensystem ist insofern eine logische Generalisierung des kartesischen Koordinatensystems, die auch auf nicht-euklidische Kontinua anwendbar ist, allerdings nur solange kleine Teile dieser Kontinua mit Bezuge auf die definierte Norm („Abstand") mit umso größerer Annäherung euklidisches Verhalten aufweisen, je kleiner der betrachtete Kontinuumsteil gewählt wird. Dies bedeutet allerdings, dass, wenn sich *u*- und *v*-Kurvensysteme nicht rechtwinklig schneiden, nur in besonderen Fällen, wenn die Differentialgrößen sehr klein gewählt werden und der Schnittwinkel zwischen ihnen vom Betrage des rechten Winkels sehr wenig abweicht, das „Skalarprodukt" ignoriert werden darf, im Allgemeinen wird dies eher keinesfalls zu tun sein! Krummlinige Koordinatensysteme, deren Hauptachsen sich nicht rechtwinklig schneiden, sollen allerdings im Rahmen dieser Abhandlung nicht weiter untersucht werden.

Unsere Tischplatte erfüllt selbstverständlich die Bedingung zur Aufstellung und Anwendung Gaußscher Koordinatensysteme, da in sehr kleinen Plattenteilen die Geometrie sowie das Verhalten von „Einheitsstäben" beinahe vollständig mit den euklidischen Axiomen im Einklang steht und Unstimmigkeiten der (über der Tischplatte) aufgespannten „Quadratnetzkonstruktion" erst bei ihrer Ausdehnung über einen erheblich größeren Flächenbereich der Marmortischplatte zum Vorschein kommt, ein Effekt, der im Zuge der Diskussion der Raumstruktur des Universums im Unterkapitel **8a)** eine ausschlaggebende Rolle spielen soll.

Gaußsche Koordinatensysteme können, wie erwähnt, auch auf mehrdimensionale Kontinua angewandt werden. Nehmen wir uns nur kurz des für die Allgemeine Relativitätstheorie derart essentiellen vierdimensionalen Kontinuums mathematisch an. Jedem Punkte dieses Kontinuums werden, ähnlich der im Unterkapitel **5** angegebenen Methode, vier Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), sog. Gaußsche Koordinaten, zugeordnet, sodass benachbarten Punkten P und P' „benachbarte" Koordinatenwerte zugeordnet werden und sich für deren physikalisch wohldefinierten (messbaren) Abstand *ds* die allgemeine Relation

$$ds^2 = g_{11}(x_1;x_2;x_3;x_4)\,dx_1^{\,2} + 2g_{12}(x_1;x_2;x_3;x_4)\,dx_1dx_2 + \ldots + g_{44}(x_1;x_2;x_3;x_4)\,dx_4^{\,2} \quad \textbf{[V]}$$ aufdrängt.

Die Terme $g_{11}(x_1;x_2;x_3;x_4)$ usw. stellen mit dem Orte im Kontinuum variierende Größen dar. Nur falls das betrachtete Kontinuum euklidischer Natur sein sollte, wird es möglich, die Koordinaten den Kontinuumspunkten so wie oben beschrieben zuzuordnen, dass die Abstandsquadrik einfachster Form

$$ds^2 = dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2} + dx_4^{\,2} \quad \textbf{[VI]}$$ normrelevant wird und im betrachteten vierdimensionalen Kontinuum unseren dreidimensionalen Messungen gegenüber analog stehende Beziehungen gelten.

(d) Das raum-zeitliche Kontinuum der Speziellen Relativitätstheorie

Minkowski erkannte als erster die Bedeutung Gaußscher Koordinaten für die Spezielle Relativitätstheorie. Denn diese Theorie zeichnet solche Systeme aus, die man Galileische Koordinatensysteme nennt und die Kriterien eines Inertialsystems erfüllen. Um solche Koordinatensysteme zu charakterisieren benötigt man vier Koordinatenwerte (x, y, z, t), die ein Ereignis bzw. einen Punkt des vierdimensionalen Kontinuums angeben. Um den Übergang zwischen zwei untereinander berechtigten Inertialsystemen zu bewerkstelligen (d.h. das eine Koordinatensystem vollführt gegenüber dem anderen eine gleichförmige Translation), bedarf es der sog. im Unterkapitel **5a)** besprochenen Lorentz-Transformation, die als Basis für die Ableitung von Konsequenzen der Speziellen Relativitätstheorie sowie als Ausdruck der universellen Gültigkeit des Lichtausbreitungsgesetzes bezüglich aller Galileischen Bezugssysteme fungieren kann.

Diese Lorentztransformation genügt der folgenden einfachen Bedingung: Es seien zwei benachbarte Ereignisse gegeben, deren gegenseitige Lage im Kontinuum durch räumliche und zeitliche Koordinatendifferenzen (dx, dy, dz, dt) bezüglich eines Galileischen Bezugskörpers K wohldefiniert ist. Bezüglich eines zweiten Galileischen Koordinatensystems K' mögen die Differenzen der beiden erwähnten Ereignisse entsprechend mit Bezeichnungen (dx', dy', dz', dt') versehen werden, was völlig legitim ist, da die Lorentz-Relationen **[4a]** und **[4c]** nicht nur für Koordinaten sondern auch für Koordinatendifferenzen und damit auch für Koordinatendifferentiale (unendlich kleine Koordinatendifferenzen) gültig bleiben. Koordinatendifferentiale der beiden Galileischen Systeme genügen dann der Bedingung $dx^2 + dy^2 + dz^2 - ct^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - ct'^2$ **[VI]**, die der Identität **[4b]** analog interpretiert werden darf als eine „differentielle Abstandsquadrik", deren Konsequenz eben die Gültigkeit der Lorentz-Transformation ist. Damit ergibt sich aber, dass die zu zwei Punkten eines euklidischen vierdimensionalen raum-zeitlichen Kontinuums, denn über diese Kontinuumsart als Sonderfall „Gaußscher Kontinua" geht die Spezielle Relativitätstheorie als „gravitationsunabhängiger Grenzfall" der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht hinaus, gehörende Größe $dx^2 + dy^2 + dz^2 - ct^2$ **[VII]** ergibt bezüglich aller bevorzugten Galileischen Bezugskörper den identischen Wert. Denn aus verallgemeinerter Bezeichnung von Koordinatenwerten $(x, y, z, \sqrt{-1}ct)$ durch (x_1, x_2, x_3, x_4) resultiert der von der Wahl des Bezugskörpers unabhängige „Abstand" *ds* der beiden Ereignisse bzw. vierdimensionalen Punkte, gegeben durch die im vorigen Unterkapitel hergeleitete Identität **[VI]**.

Aus bisherigen Ausführungen ergibt sich unmissverständlich, dass die in der Speziellen Relativitätstheorie übliche Auswahl der imaginären Variable $\sqrt{-1}ct$ statt des reellen Zeitwertes *t* der allgemeinen Auffassung des raum-zeitlichen Kontinuums als der eines „euklidischen" vierdimensionalen Kontinuums, des Sonderfalls durch Gaußsche Koordinaten bestimmter Kontinua, völlig gerecht wird, eine Schlussfolgerung, die freilich auch aus den Darlegungen des letzten Unterkapitels über Gaußsche Koordinatensysteme herauskristallisiert werden kann.

(e) Das raum-zeitliche Kontinuum der Allgemeinen Relativitätstheorie

Wie lässt sich die Konzeption Gaußscher Koordinatensysteme am effektivsten in die Allgemeine Relativitätstheorie einbetten? Bereits das Unterkapitel **5a)** zeigte uns unüberwindbare Schwierigkeiten auf, wenn man dazu tendierte, die Gesetzmäßigkeiten der Allgemeinen Relativitätstheorie durch das Beibehalten der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sowie Galileischer vierdimensionale euklidische Kontinua beschreibender kartesischer Koordinatensysteme als bevorzugter Bezugskörper zu charakterisieren. Denn die im Zuge angeführter Überlegungen aufgetretene augenscheinliche Sinnlosigkeit der Definition der Zeit- und Ortsmessung in dem Einflusse des Gravitationsfeldes unterliegenden Nicht-Inertialsystemen auf die nämliche Art und Weise, wie man es in der Speziellen Relativitätstheorie tun dürfte, bekräftigt die in der Allgemeinen Relativitätstheorie völlig korrekte Feststellung, dass die Lichtgeschwindigkeit koordinatenabhängig sei, falls ein Gravitationsfeld um ein beliebiges Nicht-Inertialsystem herrsche.

Denn gerade die nicht mehr vernachlässigbare Existenz des Gravitationsfeldes, um deren Ursprung wir uns hier nicht zu kümmern brauchen, macht die der Speziellen Relativitätstheorie eignende Definition von Orts- und Zeitkoordinaten unmöglich, da das raum-zeitliche Kontinuum der Allgemeinen Relativitätstheorie eben nicht euklidisch sondern im Gaußschen Sinne zu interpretieren ist. Im Experimente mit der rotierenden Kreisscheibe war es unmöglich, ein verlässliches kartesisches Bezugssystem zu definieren, das eine klare Zeit- und Ortsmessung mittels ruhender Uhren bzw. Maßstäbe offerieren könnte, genauso wie es sich im Unterkapitel **5c)** die Absicht, auf gekrümmter Oberfläche eines Ellipsoids aus starren Stäben des euklidischen Kontinuums dasselbe kartesische Koordinatensystem zu konstruieren, wie es uns aus Axiomen zweidimensionaler euklidischer Geometrie geläufig war, als sinnloses Unterfangen herausgestellt hatte.

Mit Gaußschen Koordinatensystemen haben wir allerdings ein mächtiges mathematisches Werkzeug erlangt, um das vierdimensionale raum-zeitliche Kontinuum auf Gaußsche Koordinaten zu beziehen, wobei eine derartige Beziehung, wie sich in Kürze ergeben wird, überhaupt nicht von der Auswahl eines der Beobachtung zugrundeliegenden Bezugskörpers abhängt. Denn jedem Punkte (Ereignis) eines vierdimensionalen Kontinuums ordnen wir vier Zahlen (Koordinaten) $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ zu, die überhaupt keine physikalische Bedeutung zu besitzen haben. Vielmehr wollen wir sie sogar mit Absicht als abstrakt definierte Angaben betrachten, bar jeglichen direkten

Realitätsbezugs. Wir müssen uns das vierdimensionale Gaußsche Koordinatensystem überhaupt nicht vorstellen, sondern benötigen bei der Charakterisierung eines bewegten materiellen Punktes lediglich das Wissen um dessen vier Zustandskoordinaten im zugrundeliegenden Kontinuum. Hätte der materielle Punkt nur eine augenblickliche Dauer, so genügte lediglich ein 4-Tupel (Wertsystem) seiner Zustandswerte, um ihn zu beschreiben, wogegen die Beschreibung der Bewegung von existent bleibenden materiellen Massenpunkten ohne eine unendliche Abfolge von 4-Tupeln überhaupt nicht auskommen kann. Da sich unendlich viele Wertsysteme aneinander reihen, folgt der Massenpunkt im vierdimensionalen Kontinuum einer eindimensionalen Linie (einer „Weltlinie"). Vielen weiteren bewegten Massenpunkten entsprächen genauso viele „Weltlinien" in demselben Kontinuum.
Die einzigen diese Punkte betreffenden Aussagen sind allerdings diejenige, die auf deren gegenseitige Begegnungen schließen lassen, und sie allein haben den physikalisch relevanten Realitätsgehalt. Wenn sich zwei Massenpunkte begegnen, so schneiden sich deren Weltlinien, was in Gaußschen Koordinaten dadurch zum Ausdruck kommt, dass einer der 4-Tupel (oder *n*-Tupel) Koordinatensysteme $\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right)$ im vierdimensionalen (*n*-dimensionalen) Kontinuum der beiden Weltlinien im „Koinzidenzpunkte" (Schnittpunkte) dieselben Werte hat. Dass zwei Weltlinien in einem oder sogar mehreren Wertsystemen übereinstimmen sollte ermöglichen, die Bewegung einzelner Massenpunkte im Bezuge auf diese „markanten Koinzidenzpunkte" in ihrem weiteren Verlaufe zu charakterisieren, da man sich logischerweise die Frage stellen dürfte, welche Bewegungszustände die betrachteten Massenpunkte von ihrem gemeinsamen Koinzidenzpunkte aus gezählt, dem wir die Bedeutung einer Orientierungsmarkierung (ähnlich dem Ursprunge eines Koordinatensystems) beimessen könnten, erreichen werden, wenn man für eine der vier Koordinaten einen ganz bestimmten Wert wählt. Nimmt man diese Feststellung in Kauf, so folgert man daraus, dass die erwähnten „Begegnungen" von Weltlinien die einzigen wirklichen Konstatierungen raum-zeitlichen Charakters darstellen können, die in physikalischen Messungen eine Rolle spielen, sodass die Beschreibung der Bewegung von materiellen Punkten in Relation zu bevorzugten Bezugskörpern auf die Begegnungen dieses Punktes mit bestimmten Punkten des Bezugskörpers unter Beachtung des Gaußschen Koordinatensystems reduziert werden kann. Gerade diese Begegnungen des Körpers mit Uhren sowie angelegten Maßstäben aus dem Unterkapitel **5a)** ist derjenige Zustandvergleich, der allein im Gaußschen Koordinatensysteme erschöpfend genau beschrieben wird und uns deswegen von kartesischen Einschränkungen loslöst.
Allgemein dürfte man das bisher Gesagte so resümieren: Die Gaußschen Koordinaten sind nicht an den euklidischen Charakter des darzustellenden Kontinuums gebunden und ersetzen dadurch einwandfrei die Beschreibung physikalischer Ereignisse mit Hilfe eines Bezugskörpers. Denn jede physikalische Beschreibung löst sich in eine bestimmte Anzahl von Aussagen auf, deren jede sich auf die raum-zeitliche Koinzidenz zweier Ereignisse A und B bezieht, und gerade diese Koinzidenz von Ereignissen (die als Aussage von der Übereinstimmung von Wertsystemen $\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right)$ und $\left(x'_1; x'_2; x'_3; x'_4\right)$ zweier Massenpunkte P und P' gebrauch macht) dient als sog. „ Orientierungszustand", von dem aus man weitere Zustände sich begegneter Punkte sinnvoll definieren und charakterisieren kann. D.h. die Bezugskörper werden in der Allgemeinen Relativitätstheorie einfach von durch Gaußsche Koordinaten bestimmten „Koinzidenzzuständen" zweier zu untersuchender physikalischer Ereignisse abgelöst, ja Bezugskörper sind Prinzipiell diese „Koinzidenzzustände" (nämlich kartesische Koordinatensysteme) für euklidischen Kontinua der Speziellen Relativitätstheorie! Dieser revolutionäre Einsicht Einsteins wollen wir weitere Schlüsse über die Rotationsbewegung astronomischer Objekte sowie der Bahnform ihrer Bewegungen entziehen, bevor sie uns in Unterkapiteln **6a)** und **6c)** zum eigentlichen, für die Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie bedeutenden Ziel dieser Ausarbeitung führt – nämlich zur genauen Formulierung des im Unterkapitel **2a)** nur grob umrissenen Allgemeinen Relativitätsprinzips sowie der mit ihm unzertrennlich zusammenhängenden Lösung des Gravitationsproblems.

(f) Weiterführende Bemerkungen

Sich langsam bewegende astronomische Objekte (wie beispielsweise Planeten), die entlang von langen Umlaufradien geprägter Bewegungsbahnen um eine zentrale Masse (wie unsere Sonne oder irgendeinen anderen Stern) rotieren, befolgen der Allgemeinen Relativitätstheorie zufolge, wie schon oben, im Unterkapitel **3** vermerkt, Bahnen, deren geometrische Form nicht völlig derjenigen einer von Newton vorhergesagten standarden Idealellipse entspricht. Diese Formkomplexität von (planetaren) Bewegungsbahnen hat allerdings nichts mit der von gegenseitiger Anziehung zwischen rotierender und zentraler (inerter) Masse herrührender Präzession (abweichende Bewegung der Achse eines rotierenden Körpers unter Einwirkung einer äußeren Kraft) des rotierenden Objekts zu tun und tritt sogar im Bezuge auf Bewegungsbahnen nicht um die eigene Achse rotierender Körper auf. In unserem Sonnensystem tritt dieser als Langachsenrotation bekannte, verhältnismäßig sehr schwer praktisch nachweisbare Effekt in Form einer „Anomalie" der Rotationsbahn Merkurs zu Tage; genauer gesagt geht es dabei um die Präzession des Perihels, des Bahnpunktes des kleinsten Abstandes Merkurs von der Sonne, die von der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins überzeugend erklärt und auch experimentell zufriedenstellend gemessen werden konnte (vgl. Darlegungen im Unterkapitel **7b)**).
Dabei hat man sich ein Schwarzes Loch, in dessen Nähe man erwähnte „Ellipsenbahnanomalien" um es rotierender Körper am deutlichsten feststellen kann, nicht als, im Schwarzschildschen Sinne, idealistisch starr vorzustel-

len, sondern man muss stets in der Realität davon ausgehen, dass jedes Schwarze Loch auch einen Eigendrehimpuls um seine eigene Rotationsachse (einer Planetenrotation um die eigene Achse nicht unähnlich), den sog. Spin, hat. Die so um ihre eigenen Hauptachsen rotierenden Schwarzen Löcher werden auch als **Kerr-Löcher** bezeichnet. Da die in der Nähe eines Schwarzen Lochs rotierenden Körper (kleinere oder weniger massereiche Sterne) sich mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen, die der Lichtgeschwindigkeit c äußerst nahe zu kommen wissen, wird deren Präzession nicht mehr schwach ausfallen, sondern es stellt sich dann heraus, dass selbst deren in der Newtonschen Mechanik zunächst sehr klar definierbare geometrische Formen ihrer Rotationsbahnen subtileren Mustern Folge leisten. Diese Bewegungsmuster hängen wiederum von der Größe sowie der Exzentrizität der betreffenden Rotationsbahn, genauso wie von der Spin-Geschwindigkeit des Schwarzen Lochs (der sich im Falle idealer Ellipsenbahnen in einem ihrer Brennpunkte befindenden zentralen Masse des Rotationssystems also) ab, denn gerade die Spin-Geschwindigkeit des Schwarzen Lochs gibt auch die Stärke des „Gravitationssogs“ an, der danach trachtet, das rotierende Objekt auf spiralförmigen Bewegungsbahnen in die Singularitätszone der zentralen Masse hineinzuziehen.

Es passiert daher nicht allzu selten, dass Sterne im Laufe ihrer Drehung um ein Schwarzes Loch irgendwann in eine durch viel kleineren Umfang ihrer Bewegungsbahn charakterisierte Rotationszone dieser zentralen Masse gelangen, in der die „Schwarzschildradius-Grenze“ längst überschritten wurde. In solchen Fällen werden derartige Sterne unter Freisetzung von Gravitationsstrahlung vom Schwarzen Loch regelrecht „verschluckt“ und in seinem Inneren von flutwellenartigen Gravitationskräften auf ihren Massenschwerpunkt zerquetscht werden. Die Einzigartigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht eben darin, dass in ihr behauptet wird, der Gravitationsenergieverlust eines um ein Schwarzes Loch rotierenden Sterns, das damit verbundene Schrumpfen der Rotationsbahn sowie dessen abschließender Fall in die Singularität seien Prozessstufen des „Gravitationstodes“ geschilderter Sterntypen, die unvermeidbar irgendwann eintreten müssen.

Dem Grunde für das Dissipieren der Gravitationsenergie des rotierenden Sterns werden wir im Unterkapitel **6d)** nachgehen. Hier wollen wir abschließend bemerken, dass die Rotation von Sternen um Schwarze Löcher sehr wertvolle experimentelle Indizien für die Korrektheit der Beschreibung komplexer Bahnformen Präzession ausführender Rotationskörper seitens der Allgemeinen Relativitätstheorie liefern kann, weswegen es Astronomen immer als willkommen betrachten, wenn sie im Rahmen ihrer Erforschungen neuer Galaxien auf aus Sternen und Schwarzen Löchern bestehende Rotationssysteme stoßen, deren höchst massive Schwarze Löchern (Zentralmassen) den sie „umkreisenden“ Sternen einen gewissen Bewegungsradius einräumen, deren Länge den Stern nicht sehr schnell in die Nähe der Destruktionszone des Schwarzen Lochs zwingt, sodass die Bahnänderungseffekte und die Überprüfung ihrer Exzentrizität im Allgemeinen nicht von verstärkt (dissipativ) ausströmender Gravitationsstrahlung des rotierenden Sterns verdeckt (gestört) wird.

Und selbst wenn das Schwarze Loch nicht genügend massiv wäre und dem um es rotierenden Sterne bald der Untergang drohte, so passiert der dissipative Gravitationsenergieverlust des betreffenden Sterns nicht alleine aufgrund starker Anziehung des Schwarzen Lochs sondern vor allem wegen häufiger Anziehungen dieses einen Sterns mit anderen ebenfalls rotierenden Sternen sowie seiner Kollision mit der gasförmigen Akkretionsscheibe des Schwarzen Lochs. Denn insbesondere diese Kollisionen des Sterns mit der Akkretionsscheibe des Schwarzen Lochs (der ihn umrundenden „Gaswolke“) führen schließlich zum Verlust seiner kinetischen Rotationsenergie, was eine endgültige Radiusabnahme der Rotationsbahn im betrachteten „Stern-Schwarzes Loch-System“ in Form der Gravitationsstrahlung mit sich zieht. Die Natur sowie das Entstehungsmechanismus dieser Gravitationsstrahlung werden, wie angedeutet, im nächsten Unterkapitel entschlüsselt.

6. Gravitationswellen und ihr (direkter) Nachweis

(a) Genauere Formulierung des Allgemeinen Relativitätsprinzips

Endlich sind wir in der Lage, das im Unterkapitel **2a)** angegebene Allgemeine Relativitätsprinzip qualitätsvoller und informationsreicher zu präzisieren, denn so, wie es in der ursprünglichen Fassung dasteht („Alle Bezugskörper K, K’, usw. sind für die Naturbeschreibung [Formulierung der allgemeinen Naturgesetze] gleichwertig, welches auch deren Bewegungszustand sein mag“) vermag es einen konsequent Denkenden nicht zu überzeugen. Denn diese erste Fassung des Allgemeinen Relativitätsprinzips fällt sofort ins Wasser, sobald man sich auf die der Speziellen Relativitätstheorie anhaftende kartesische Koordinatenmethode der auf Verwendung starrer Bezugskörper basierenden raum-zeitlichen Beschreibung physikalischer Erscheinungen beschränkt. An die Stelle des Bezugskörpers tritt jedoch in der Allgemeinen Relativitätstheorie, wie uns dies im Unterkapitel **5e)** klar wurde, das Gaußsche Koordinatensystem, dessen Einführung Einstein zu folgender Umformulierung des Allgemeinen Relativitätsprinzips verleitet (s. **[2]**, S. 64): “Alle Gaußschen Koordinatensysteme sind für die Formulierung der allgemeinen Naturgesetze prinzipiell gleichwertig.“

Verweilen wir ein wenig bei der Einzigartigkeit dieser Formulierung, aus der die Genialität Einsteins am eindruckvollsten hervortritt. Der Speziellen Relativitätstheorie zufolge gehen die alle allgemeinen Naturgesetze ausdrückenden Gleichungen in Gleichungen derselben Form über, wenn man an Stelle der Raum-Zeit-Variablen

(x, y, z, t) eines Galileischen Bezugskörpers K unter Anwendung der Lorentztransformation die Raum-Zeit-Variablen (x', y', z', t') eines neuen Galileischen Bezugskörpers K' einführt. Die Allgemeine Relativitätstheorie behauptet in ähnlicher Weise, physikalische Naturgesetze beschreibende Gleichungen in einem beliebigen *n*-dimensionalen Kontinuum müssten bei Anwendung beliebiger Substitutionen der Gaußschen Variablen $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ in Gleichungen derselben Form übergehen, die sich lediglich in der Form von Funktionen $g_{mk}(x_1; \ldots; x_n)$ für $m = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, n$ (s. auch den Ausdruck **[V]** oben) voneinander unterscheiden würden (diesem Umstand ist vor allem im Unterkapitel **8b)** eingehender nachzugehen). Denn absolut jede Transformation, nicht nur die Lorentztransformation, symbolisiert in der Form sie wiedergebender Matrix eine Abbildung, die wiederum als Übergang eines Gaußschen Koordinatensystems in ein anderes gedeutet werden darf (die Lorentztransformation ist eine orthogonale lineare Abbildung, wogegen deren Verallgemeinerungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie zu nichtlinearen Abbildungen gehören).
Es ist eines dieses Unterkapitel abschließenden Versuches wert, die angeführten Gedanken über Gaußsche Koordinatensysteme in der Allgemeinen Relativitätstheorie ohne Verzicht auf äußerst nützliche dreidimensionale Anschauung zu formulieren, indem wir einen sog. „allgemeinrelativistischen Bezugskörper“ einführen, obgleich die Allgemeine Relativitätstheorie von Bezugskörpern im spezialrelativistischen Sinne unabhängig ist Fangen wir deswegen erneut mit dem methodologischen Grundsatz der Beschreibung von Naturgesetzen in der Speziellen Relativitätstheorie an. Die Betrachtungen dieser Theorie beziehen sich stets auf Galileische Raumgebiete, in denen kein Gravitationsfeld existiert. Als Bezugskörper sollen dann sog. Galileische Bezugskörper dienen, den man sich als einen starren Bezugskörper von derart gewähltem Bewegungszustande vor Augen führt, sodass relativ zu diesem das Galileische Relativitätsprinzip von der gleichförmig-geradlinigen Bewegung idealistisch „isolierter“ (dem Gravitationsfelde nicht unterworfener) materieller Punkte gilt. Es liegt zunächst nahe, dieselben Galileischen Raumgebiete auch den Nichtgalileischen Bezugskörpern zugrunde zu legen, relativ zu denen allerdings ein Gravitationsfeld von spezieller, uns in Unterkapiteln **2c)** und **5a)** hervorgetretener Art herrscht.
Man hat sich allerdings sofort von der Fiktion eines starren Bezugskörpers in der Allgemeinen Relativitätstheorie zu trennen, genauso wie es in verallgemeinerten Gaußschen Kontinua, wie im Unterkapitel **5c)** verdeutlicht, keine starren Einheitsstäbe mehr geben kann, da sogar der Gang von aufgestellten Uhren von Gravitationsfeldern derart beeinflusst wird, dass eine sinnvolle physikalische Zeitdefinition mittels dieser Uhren nicht „automatisch“ evident wird wie in der Speziellen Relativitätstheorie. Indem man sich also nichtstarrer, nicht nur gänzlich beliebig gewählter sondern auch während ihrer Bewegung beliebige Gestaltsänderungen (Deformationen, Verformungen) erleidender Bezugskörper bedient, sieht man sich gleichzeitig zur Einführung eine sinnvolle Zeitdefinition erlaubender Uhren beliebigen, noch so unregelmäßigen Ganggesetzes gezwungen, die man sich an einem Punkte des nichtstarren Bezugskörpers befestigt zu denken hat und die nur der Kontinuumsbedingung genügen, dass gleichzeitig wahrnehmbare Zeitangabe örtlich benachbarter Uhren unendlich wenig voneinander abweichen (denn Zeit wird verständlicherweise auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie weiterhin als Kontinuum behandelt, und zwar als ein „Kontinuumsbereich“ des allgemeinen Gaußschen Kontinuums).
Diesen nichtstarren Bezugskörper bezeichnet Einstein geistreich als „Bezugsmolluske“ (eine Art des als Bezugskörper dienenden Weichtieres!) und er ist völlig gleichwertig mit einem beliebigen Gaußschen vierdimensionalen Koordinatensystem, mit dem einzigen subjektiven Unterschied, dass die „Molluske“ die eigentlich unberechtigte formale Aufrechterhaltung der Sonderexistenz der Raumkoordinaten gegenüber der Zeitkoordinate fingiert, was ihr auch eine gewisse Dosis an Plastizität gegenüber dem Gaußschen Koordinatensystem sichert. Jeder sich im Raumzeitkontinuum entlang einer Weltlinie bewegende Punkt der Molluske wird dabei als Raumpunkt behandelt, relativ zu dem jeder weitere ruhende materielle Punkt schlechthin im Ruhezustande verweilt, solange die Molluske als „nichtstarrer Bezugskörper der Allgemeinen Relativitätstheorie“ angesehen wird.
Unter den genannten Bedingungen spricht das oben genauer formulierte Allgemeine Relativitätsprinzip die Forderung aus, dass alle Moluskeln mit gleichem Rechte und gleichem Erfolge bei der physikalischen Deutung und Formulierung allgemeingültiger Naturgesetze Verwendung finden dürfen, eine Forderung also, die die Unabhängigkeit der Naturgesetze von der Molluskenwahl garantiert und durch damit diesen Naturgesetzen auferlegten „Wesensbeschränkung“ die Einzigartigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie ausmacht.

(b) Der physikalische Feldbegriff

In der Newtonschen Mechanik haben Raum und Zeit eine doppelte Funktion inne: Während sie einerseits als Träger den Rahmen angeben, innerhalb dessen sich das physikalische Geschehen ereignet und durch die Raum-Koordinaten sowie die Zeit beschreiben lässt, so dienen sie andererseits der Postulierung von Inertialsystemen, die allen anderen Bezugssystemen gegenüber wegen der Tatsache bevorzugt werden , dass in ihnen der Trägheitssatz gilt. Dabei wurde die Materie stets als aus „materiellen Punkten“ bestehend betrachtet, deren Bewegungen das physikalische Geschehen bestimmten. Selbst bei der Betrachtung kontinuierlicher Materieverteilungen wurde seitens der klassischen Mechanik immer in dem Sinne behandelt, das man deren Teilvolumina selbst als

Massenpunkte (materielle Punkte) auffasste, auf deren Bewegungen gegenüber bestimmten Inertialsystemen das damalige physikalische Weltbild aufgebaut werden konnte.

Denn das „physikalisch Reale", das als vom beobachtenden Subjekt unabhängig gedacht und als aus Raum und Zeit einerseits sowie, mit Bezuge auf diese, aus bewegten dauernd existierenden materiellen Punkten andererseits angesehen wurde, fand in der die unabhängige Existenz von Raum und Zeit untermauernden Überzeugung Ausdruck, wenn die Materie verschwände, so blieben dennoch Raum und Zeit allein als Bühne physikalischer Vorgänge übrig. Lediglich in Vorgängen, wie beispielsweise den Temperaturänderungen ponderabler (wägbarer) Körper, die nicht auf Bewegung von materiellen Punkten zweckmäßig zurückgeführt werden konnten, erblickte man Vermutungen, man könnte den materiellen Punkt Newtons (den sog. Partikelbegriff) hinsichtlich geschilderter Phänomene durch ein geeignetes Feldbegriff ersetzen, der zunächst lediglich als Hilfsbegriff dienen und Kontinua allgemein und physikalisch schlüssig behandeln sollte. Auch in diesem Falle erweist sich die Temperatur als ein einfaches Beispiel eines (skalaren) Feldes, das als Funktion der Raumkoordinaten und der Zeit gedeutet werden darf. Demgegenüber sei noch das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung als Paradigma eines Vektorfeldes angeführt, das auch als eine (dieses Mal allerdings) vektorielle Funktion der Raumkoordinaten bzw. der Zeit interpretiert werden könnte.

Für alle angeführten Felder erschien es ein charakteristisches Merkmal zu sein, dass sie nur innerhalb ponderabler Massen auftreten würden, denn, so verstand man es früher, die Felder sollten nur innere Zustände dieser Massen beschreiben und könnten nicht unabhängig von der Materie existieren sondern nur als im deren Inneren befindlich eingeführt werden. Dennoch zeigten die gegen Ende des 19. Jahrhunderts untersuchten Interferenz- und Beugungserscheinungen des Lichtes, die sich durch Feldinterpretation der Lichtausbreitung äußerst effektiv deuten ließen, dass Felder auch in Abwesenheit von Massen existieren könnten. Da man sich jedoch zu jener Zeit nicht damit arrangieren konnte, die Emanzipation des Feldbegriffes vom Materiebegriff weiter voranzutreiben, versuchte man, die elektromagnetische Wellennatur des Lichtes und ihrer Feldbeschreibung weiterhin eine Rolle „intrinsischer Eigenschaft" materieller Körper zuzuordnen, indem sogar im „leeren" Raume elektromagnetische Wellen einer unsichtbaren Substanz, dem ruhenden sog. Äther, innewohnen und sich relativ zu diesem als Inertialsystem gedachten theoretischen Konstrukte fortpflanzen sollten. Dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen der Lichtgeschwindigkeit c entspricht, veranlasste Maxwell und Faraday, Lichtwellen mit zuvor rein hypothetisch postulierten elektromagnetischen Wellen zu identifizieren, was nicht nur zur Klärung der Wellennatur des Lichtes sondern auch zur regelrechten konzeptionellen „Absorption" der Optik von der Elektrodynamik beigetragen hatte. Dadurch erhielt auch der Feldbegriff selbst innerhalb des mechanischen Weltbildes eine immer größer werdende Selbständigkeit gegenüber dem Newtonschen Partikelbegriff.

Trotzdem vermochte man sich noch nicht von mechanischer Interpretation der Realität zu trennen, die den Äther als einen Inbegriff des absoluten Raumes ansah und elektromagnetische Felder als zustände desselben wertete. Hieran änderte sich sogar mit dem die Existenz des Äthers falsifizierenden, 1887 von Michelson durchgeführten „Interferometerversuch" zunächst wenig, obgleich man bereits einige Jahre danach zur korrekten Einsicht gekommen ist, die Annahme der Existenz eines Äthers verletze als Fundament elektrodynamischer Theorie die Newtonsche Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme, indem sie dem Inertialsysteme des Lichtäthers eine durch nichts zu berechtigende Bevorzugung gegenüber allen anderen möglichen Inertialsystemen einräume. Erst der Einsteinschen Speziellen Relativitätstheorie von 1905 gelang es, durch Übernahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus Maxwellscher Elektrodynamik und der Lorentztransformation für die Zeit und die Raumkoordinaten als legitimer Abbildungsvorschrift, die den Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes in vom Gravitationsfelde unabhängigen („isolierten") Raumgebieten einwandfrei beschreibt, das Galileische Relativitätsprinzip von der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme im Rahmen physikalischer Deutung von Bewegungsvorgängen mit der erwähnten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen dadurch in Einklang zu bringen, dass sie den absoluten Charakter der Gleichzeitigkeit aufgegeben, Naturgesetze im Bezug auf die Lorentztransformation von Inertialsystemen für Invariant erklärt und die möglichen Naturgesetzmäßigkeiten somit einer wichtigen realitätsbezogenen physikalischen Aufstellungseinschränkung unterzogen hatte.

Wie verhält sich die Spezielle Relativitätstheorie zum Begriffe des physikalischen Raumes? Fassen wir zunächst die Novitäten in der allgemeinen Raumauffassung dieser Theorie gegenüber der klassischen Mechanik zusammen. Erstaunlicherweise gehört zu ihnen nicht die Vierdimensionalität der Realität, denn eine derartige Raumanschauung existierte bereits in der klassischen Mechanik, die physikalischen Ereignisse (events) durch vier Zahlen, drei Raum- und eine Zeitkoordinate, spezifizierte und deren Gesamtheit in eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit (Kontinuum) einbettete. In klassischer Mechanik zerfällt dieses vierdimensionale Kontinuum objektiv in die eindimensionale Zeit sowie in dreidimensionale räumliche „Schnitte", die alle gleichzeitigen Ereignisse enthalten, da der erwähnte „Koordinatenzerfall" für alle Inertialsysteme identisch sein und die Gleichzeitigkeit (Simultaneität) eines bestimmten Ereignispaars bezüglich des einen Inertialsystems die Gleichzeitigkeit derselben Ereignisse hinsichtlich aller ins Auge gefassten Inertialsysteme involvieren sollte. Eben dies hat gemeint zu sein, wenn von der „absoluten Zeit" in der klassischen Mechanik die Rede sein sollte. In der Speziellen Relativitätstheorie ist dagegen die Gleichzeitigkeit von Ereignissen in einem Inertialsystem zwar vorhanden, sie ist allerdings nicht länger unabhängig von der Wahl des Inertialsystems, da das vierdimensionale Kontinuum nun nicht in für alle Inertialsysteme identische räumliche „Schnitte" mit gleichzeitigen Ereignissen sondern vielmehr in

einen sog. Lichtdoppelkegel“ objektiv zerfällt, wobei „Jetzt“ in räumlich ausgedehnter Welt auf einen die Spitzen beider Lichtkegeln verknüpfenden Punkt zurückgeführt wird und somit seine ursprüngliche „Newtonsche“ Bedeutung völlig verliert. Nun werden Ereignisbeziehungen sogar in lichtartig, raumartig und zeitartig separierte klassifiziert, wobei lediglich im Falle licht- und zeitartiger Ereignisseparierung die Kausalität gewahrt wird! Daher wird es verständlich, wieso Raum und Zeit nicht zerfallen (voneinander getrennt betrachtet werden) dürfen, sondern unbedingt als vierdimensionales Kontinuum aufgefasst werden müssen.
Dadurch, dass die Spezielle Relativitätstheorie die physikalische Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme aufgezeigt hatte, wies sie auch die Hypothese des ruhenden Äthers zurück. Eben aufgrund dieser Notwendigkeit, auf die Idee, das elektromagnetische Feld könnte als Zustand eines materiellen Trägers (des Äthers) gedeutet werden, zu verzichten, ergibt sich, dass das Feld, wie Einstein meint, „zu einem irreduziblen Element der physikalischen Beschreibung wird, irreduzibel in demselben Sinne wie der Begriff der Materie in der Newtonschen Theorie.“ (s. **[2]**, S. 102 – 103) Dieser Aussage wollen wir uns im Unterkapitel **8b)** erneut entsinnen, im Augenblicke werden wir sie jedoch nicht weiter vertiefen.
Es bleibt daher nur noch übrig, Gemeinsamkeiten der Speziellen Relativitätstheorie sowie der klassischen Mechanik anzuführen. Das Inertialsystem wäre eine der ersten Gemeinsamkeiten, da auch in der Speziellen Relativitätstheorie Naturgesetze lediglich im Falle einer Zugrundelegung eines Inertialsystems bei der raum-zeitlichen Beschreibung der Realität gelten und nur in diesen privilegierten Systemen (Bezugskörpern) der Trägheitssatz, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sowie alle bekannten Feldgesetze sinnvoll definiert werden können. Wie in der klassischen Mechanik erweist sich auch spezialrelativistisch der Inertialraum, wenn auch dieses Mal unzertrennlich mit der Zeit verknüpft, als die im voraus vorgegebene „leere Ereignisbühne“ (leeres Raum-Zeit-Kontinuum), die übrig bleiben muss, wenn Materie und Feld entfernt (weggedacht) werden. Die Inertialräume sind insofern auch in der Speziellen Relativitätstheorie vierdimensionale, miteinander durch Lorentztransformationen verknüpfte Koordinatensysteme. D.h. aber auch, der starre vierdimensionale Minkowski-Raum, den man auch als spezialrelativistisches vierdimensionales Analogon des starren dreidimensionalen Äthers der klassischen Mechanik betrachten darf, wird als Materie- und Feldträger eingeführt und beseitigt nicht den Schrecken des „leeren Raumes“, gegen den sich **Rene Descartes**’ Philosophie vehement gewehrt hatte. Diese „Beseitigung“ des „leeren Raumes“ wird tatsächlich in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe des gerade eingeführten Feldbegriffs erreicht (s. hierzu Unterkapitel **8b)**).

(c) Die Lösung des Gravitationsproblems

Auch wenn es uns in voranstehenden Unterkapiteln gelungen ist, die Molluske als allgemeinrelativistischen nichtstarren Bezugskörper einzuführen und dadurch das Allgemeine Relativitätsprinzip zufriedenstellend zu formulieren, ergibt sich das sog. „Gravitationsproblem“ von selbst, das nach der Möglichkeit einer Ableitung des Allgemeinen Gravitationsgesetzes sucht, die nicht auf die Verallgemeinerung der Koordinatentransformation des Galileischen Spezialfalls zurückgreift und auch vom um ein Nicht-Inertialsystem K’ herrschenden Gravitationsfelde von der in Unterkapiteln **2c)** und **5a)** geschilderten besonderen Art unabhängig ist. Infolge der Konsistenz der Allgemeinen Relativitätstheorie stellt man natürlich auch die Hypothese auf, die Einwirkung des Gravitationsfeldes auf Maßstäbe, Uhren sowie frei bewegliche, materielle Punkte gehorcht sogar dann denselben Gesetzen, wenn das einwirkende Gravitationsfeld allgemeiner Art ist und nicht von besonderer Beschaffenheit einer aus der Verallgemeinerung der Lorentztransformation durch Gaußsche Koordinatensysteme ableitbaren allgemeinen mathematischen Gesetzform geprägt ist. Wie ein solches, das bisherige allgemeine Relativitätsgesetz, vertreten durch die Quadrikenidentität **[V]**, noch stärker verallgemeinernde Gravitationsgesetz mathematisch zu deuten wäre, überlassen wir dem am Ende des Unterkapitels **8b)** Anzumerkenden und begnügen uns vorerst damit, nur die wichtigsten Bedingungen anzugeben, die selbst ein solches noch stärker verallgemeinertes Gravitationsgesetz zu erfüllen hätte. Um allerdings eine prinzipielle Beziehung zwischen dem allgemeinen und noch stärker verallgemeinerten Gravitationsgesetze zu klären, bedarf es einer kurzen Resümierung des bisher über das Allgemeine Relativitätsprinzip Schlussfolgerten.
Gehen wir daher erneut von der Betrachtung eines Galileischen Raumgebietes aus, in dem relativ zu einem euklidischen, starren Bezugskörper K kein Gravitationsfeld existiert. Das Verhalten von Maßstäben und Uhren bezüglich K wird durch die Spezielle Relativitätstheorie genügend präzise mathematisch erfasst, genauso wie das Verhalten von Einflüssen des Gravitationsfeldes gegenüber als „isoliert“ zu wertenden Massenpunkten dem Galileischen Relativitätsprinzip sowie dem ersten Newtonschen Gesetz (Trägheitsgesetz) folgt, sodass sich letztere bekanntlich geradlinig und gleichförmig bewegen. Des Weiteren beziehen wir dieses Raumgebiet auf ein beliebiges Gaußsches Koordinatensystem (eine „Molluske“) als allgemeinrelativistischen „Bezugskörper“ K’. Hinsichtlich dieses Bezugskörpers K’ muss nun ein Gravitationsfeld G von besonderer, durch die Gleichung **[V]** charakterisierter Art bestehen, sodass man schließlich durch Umrechnung mittels der Verallgemeinerung der Lorentztransformation durch Einführung Gaußscher Koordinaten Genaueres über das Verhalten von Uhren, Maßstäben und frei beweglichen materiellen Punkten in Relation zur Molluske K’ erfährt, und dieses Verhalten als das Verhalten von Uhren, Maßstäben sowie materiellen Punkten unter der Wirkung des Gravitationsfeldes G zu interpretieren neigt. Danach wird das raum-zeitliche Verhalten des aus dem Galileischen Spezialfall durch

bloße Koordinatentransformation hergeleiteten Gravitationsfeldes G untersucht und durch ein verallgemeinertes Gesetz formuliert, das immer im moluskenunabhängigen Sinne Gültigkeit beanspruchen darf.
Dieses verallgemeinerte Gravitationsgesetz darf jedoch noch nicht als das später genauer zu beschreibende stärker verallgemeinerte Gravitationsgesetz angesehen werden, zumal das betrachtete Gravitationsfeld G von besonderer, der Gaußschen Verallgemeinerung der Lorentztransformation entspringender Art ist. Um dieses stärker verallgemeinerte Gravitationsgesetz finden zu können, bedarf es einer weiteren Verallgemeinerung des bereits verallgemeinerten Gravitationsgesetzes, die folgenden Forderungen zuzusprechen hat:
A) Die gesuchte stärkere Verallgemeinerung des verallgemeinerten Gravitationsgesetzes hat ebenfalls dem Allgemeinen Relativitätsprinzipe Gehorsam zu leisten.
B) Für die felderregende Wirkung der im betrachteten Raumgebiete vorhandenen Materie ist allein deren, im Satze der Äquivalenz von Energie und Masse der Speziellen Relativitätstheorie enthaltene träge Masse, bzw. deren Energie verantwortlich.
C) Gravitationsfeld und Materie haben beide den Energie- und Impulserhaltungssätzen zu genügen.
Das diese Bedingungen erfüllende stärker verallgemeinerte Gesetz wollen wir von nun an, insbesondere im Hinblick auf das Unterkapitel **8b)**, verallgemeinerte Gravitationstheorie, das (schwächer) verallgemeinerte Gravitationsgesetz hingegen als reine Gravitationstheorie benennen. Die verallgemeinerte und reine Gravitationstheorie beseitigen nicht nur den Bevorzugungsgrund Galileischer Bezugskörper als der Speziellen Relativitätstheorie anhaftenden Hauptmangel, sondern sie deuten auch die Gleichheit von schwerer und träger Masse neu und erlauben die Klärung von zwei wesensverschiedenen astronomischen Beobachtungen, die mittels der klassischen Mechanik nicht enträtselt werden können.
Diesen astronomischen Beobachtungen, nämlich die Halbachsenrotation der Merkurbahn um die Sonne sowie der Spektralverschiebung der Wellenlänge des von großen Sternen zu uns gesandten Lichts gegenüber den auf der Erde von derselben Molekülart erzeugten Lichtwellen, wollen wir im Unterkapitel **7** begegnen, da sie mit beeindruckender Genauigkeit bestätigt werden konnten. Dennoch wollen wir uns einige dieses Unterkapitel abschließenden Vermerke hinsichtlich der Merkurrotation nicht entgehen lassen.
Wendet man die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie auf sehr schwache Gravitationsfelder an, so ergibt sich als deren erste Näherung die Newtonsche Gravitationstheorie, die dem Distanzquadrat aufeinander wirkender Massenpunkte indirekt proportionale Anziehungskraft als Hypothese einführt. Vergrößert man die Rechnungsgenauigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie, treten Abweichungen von der Newtonschen Gravitationstheorie auf, die sich wegen ihrer Kleinheit in der astronomischen Messpraxis fast vollständig der experimentellen Registrierung entziehen müssten. Eine dieser Abweichungen, die, obwohl klein, zum Glück noch feststellbar ist, betrifft die Newtonsche Vorhersage, Planeten des Sonnensystems rotierten alle auf Ellipsenbahnen um die Sonne, die gegenüber Fixsternen ihre Lage nicht ändern würden (d.h. räumlich fixiert wären), sähe man einmal von der Eigenbewegung der Fixsterne sowie der Gravitationseinwirkung anderer Planeten des Sonnensystems auf den beobachteten Planten ab.
Diese Vorhersage wird mit großer Genauigkeit bei fast allen Planeten des Sonnensystems bestätigt, lediglich beim sonnennächsten Merkur stellt man, aufgrund des am stärksten einwirkenden Gravitationsfeldes der Sonne, eminente Messabweichungen fest, die darauf schließen lassen, dass die Ellipsenhauptachse seiner allgemeinrelativistisch „korrigierten“ Bahn gegenüber den Fixsternen in der Bahnebene im Sinne der Umlaufbewegung rotiert und eine solche Rotationsbewegung den Betrag von 43 Bogensekunden pro Jahrhundert hat. Während die klassische Mechanik ungeheuer komplizierte Hypothesen einführen muss, um dieses Messergebnis zu erklären, besagt die Allgemeine Relativitätstheorie, dass jede Planetenellipse um die Sonne ähnlich der Merkurellipse zu rotieren hat, dass diese Rotation bei allen Planeten des Sonnensystems außer Merkur jedoch zu klein ist, um bei der erzielbaren Beobachtungsgenauigkeit festgestellt zu werden.

(d) Nachweis von Gravitationswellen

Die Persistenz der Sternrotation um ein äußerst massives Schwarzes Loch lässt sich mittels eben gelösten Gravitationsproblems sehr einfach so deuten, dass sie sogar Jahrtausende lang ungefährdet bestehen kann, dass der Radius der Rotationsbahn nicht desto trotz immer stärker abnehmen wird und der betrachtete Stern irgendwann im Schwarzen Loch den „Gravitationstod“ erleiden wird. Das Frappierende dabei versteckt sich in der Tatsache, dass die Verkleinerung des Rotationsbahnradius’ sogar dann mit demselben Ergebnis fortschreiten würde, wenn der Stern keine Interaktionen mit der Akkretionsscheibe sowie anderen Sternen in naher Umgebung erführe – einem Energieverluste der Rotationsbahn und dem sich daran anschließenden Fall des Sterns auf spiralförmigem Wege in das Schwarze Loch ist nicht auszuweichen (die einzige Ausnahme stellt, wie schon Newton bekannt, ein sphärischer Körper, dessen Expansion oder Kontraktion die Form des umliegenden Gravitationsfeldes nicht verändert) . Eben in der Ursache dieses Falls, der ständigen Emission der Gravitationsstrahlung seitens des rotierenden Sterns, verbirgt sich eine der wichtigsten Voraussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, denn sie kann auch so formuliert werden, dass mit der Größen- und Formänderung eines beliebigen Objekts im Gravitationsfelde auch die Stärke der Gravitationskraft Änderungen unterliegt.

Es ist allerdings keinesfalls zu vergessen, dass sich alle vorkommenden Änderungen im Gravitationsfelde, zwecks dessen Darstellung wir erneut, wie etliche Male zuvor, auf die bildhafte Vorstellung von einer elastischen Membran zurückgreifen, nicht augenblicklich im Sinne einer Fernwirkung ausbreiten können, denn dies würde absurderweise voraussetzen, Informationen könnten mit Überlichtgeschwindigkeit verbreitet werden. Daher ist für große Entfernungen zwischen Körpern immer die Nahwirkung der Feldphysik maßgeblich, denn (Form-) Änderungen des Gravitationsfeldes manifestieren sich als „Radiation" (Strahlung) bzw. Schwingungen („Verzerrungen") der endlosen elastischen hochsensiblen Membran des Gravitationsfeldes, die sich als Wellen sich ändernder Gravitation beschreiben lassen.
Die Konzeption von Gravitationswellen dürfte nicht mit derjenigen von seitens unterschiedlicher Ladungen erzeugten elektromagnetischen Wellen verwechselt werden, denn elektromagnetische Wellen werden beispielsweise in Komplexen zwei unterschiedlich geladener Ladungen, den sog. Dipolen, generiert. Diese Dipole sind hingegen äußerst schlechte „Erzeuger" von Gravitationswellen, da sich die Gravitation als Fundamentalkraft erst in sehr großen makroskopischen Bereichen bemerkbar macht, während man sie im Mikroskopischen vernachlässigen darf. Daher entstehen stärkste Gravitationswellen immer in der Nähe von Schwarzen Löchern oder sogar in der Umgebung sog. Binärsysteme, die aus zwei umeinander rotierenden Schwarzen Löchern bestehen. Des Weiteren existieren auch keine Gravitationsladungen, die negativ oder positiv wären, da Gravitation lediglich anziehend wirkt. Gerade dieses Fehlen „negativer Gravitationsladung" ermöglicht zwar der Gravitationskraft bei massiven Körpern andere drei Fundamentalkräfte zu überwinden, sie verhindert allerdings einen Körper auch darin, Gravitationsstrahlung zu produzieren.
Würden wir trotzdem versuchen, wie im Falle elektrischer Ladungen, die elektromagnetische Wellen dadurch hervorbringen, dass ihr gemeinsamer Zentrum um den Massenzentrum des betrachteten Körpers vibriert, die Gravitationswellen dadurch als „Gravitationsdipolstrahlung" in Erscheinung treten zu lassen, so wird dies vom Äquivalenzprinzip vereitelt, denn diesem Prinzip zufolge lässt sich zwischen schwerer und träger Masse nicht unterscheiden, womit auch das eventuelle „Zentrum von Gravitationsladungen" und das Massenzentrum des Körpers zusammenfielen. Dieser Umstand schließt aber erst recht die Möglichkeit jeglicher Vibrationen zweier „Zentrumsarten" aus, die, wie im Falle bewegter Ladungen, elektromagnetische Wellen erzeugen würden. Damit steht fest: Gravitationsstrahlung erzeugende Dipole gibt es nicht!
Und dennoch könnte man Gravitationswellen dadurch erklären, dass man zwei positive Ladungen an Enden eines Stabes positioniert, deren Ladungs- und Massenzentrum *fast* zusammenfallen. Die Tatsache allerdings, dass die positive Ladungen (bzw. Massen) betreffenden Ladungs- bzw. Massenschwerpunkte nicht völlig zusammenfallen, bewirkt allerdings eine viel schwächere Strahlungsemission, als dies im Falle unterschiedlicher Ladungen auftrat, denn das einzige, was sich im Falle zweier gegenüber einander aufgestellter Massen wirklich ändert, ist deren Quadrupolmoment, das die Stärke der räumlichen Ladungsverteilung der beiden positiven Ladungen (Massen) angibt und als intrinsische Körpereigenschaft sich viel als sog. „Quadrupolstrahlung" schwächer manifestiert als die entsprechende „Dipolstrahlung". Als diese Quadrupolstrahlung wollen wir uns die Gravitationswellen denken.
Infolge der Quadrupolstrahlung verliert (dissipiert) das Binärsystem Schwarzer Löcher Energie, sodass deren Umlaufbahnen sich zueinander dem Umfange nach verkleinern. Auch wenn die Rotationsgeschwindigkeit beider Löcher anfangs, als sich noch relativ weit voneinander umkreist hatten, vergleichsmäßig niedrig war, so beginnen die Schwarzen Löcher mit der Verringerung der Radiuslänge ihrer Umlaufbahnen, ähnlich den zum Gravitationstode verurteilten rotierenden Sternen, selbst immer schneller zu rotieren, da sich auch deren Energieverlustrate erheblich vergrößert, sodass die Schwarzen Löcher des Binärsystems sogar im letzten Stadium der Rotationsenergiedissipation eventuell miteinander verschmelzen könnten.
Wie sind geschilderte kosmische Phänomene auszunützen, um Gravitationswellen ähnlich den elektromagnetischen sogar direkt (beispielsweise mittels des **Young**schen Doppelspaltexperiments) nachweisen zu können? Im Augenblick ist nur feststellbar, dass ein direkter Nachweis von Gravitationswellen nicht erbracht werden kann. Allein die Dissipation der Rotationsenergie sich umkreisender Schwarzer Löcher bzw. deren Verlust um einen den Berechnungen der Allgemeinen Relativitätstheorie entsprechenden Wert indiziert die Wirklichkeit von Gravitationswellen, die in der Gravitationsfeldmembran „Verzerrungen" erzeugen. Wie sehen denn diese „Verzerrungen" aus? Man stelle sich einen „Gummikreisring" als Ausschnitt der elastischen Gravitationsmembran vor, der gegenüber der Quelle von Gravitationswellen senkrecht steht. Passiert die sich radial ausbreitende Gravitationswelle ähnlich einer „Schockwelle" diesen „Ring", so „deformiert" er sich – er wird nämlich zunächst in die eine Hauptachsenrichtung, dann aber in die andere gestreckt und damit zur Ellipse verformt, um nach dem Vorbeilaufen der Welle zur ursprünglichen Kreisform zurückzufinden. Dieses periodische Muster der gegenseitigen Streckung und Stauchung des „Gummikreisrings" in beiden zueinander senkrechten Hauptachsenrichtungen darf als charakteristisches Zeichen (Symptom) für das Auftreten und Ausbreitung der Gravitationsstrahlung in einem Gravitationsfeldbereiche angesehen werden, denn man muss sich den von Gravitationswellen affektierten Gravitationsfeldbereich lediglich als einen aus unendlich vielen aneinandergereihten „Kreisringen" zusammengeflickten Membranausschnitt vorstellen, der ähnlich den Wasserwellen senkrecht zu deren Ausbreitungsrichtung oszilliert, um eine anschauliche Vorstellung der Gravitationswellenfortpflanzung zu erhalten.

Wie könnte man diese „Oszillationen“ der Gravitationsfeldmembran überprüfen? Es wäre beispielsweise möglich, eine Apparatur im Sinne von **William Cavendish** zur Gravitationskonstantenbestimmung einzusetzen, die zwei Massen durch starre Stäbe verknüpft. Da jedoch die Quadrupelstrahlung viel schwächer ist als elektromagnetische Strahlung, wäre dieser Experimentaufbau ineffektiv und zeitraubend. Daher adaptiert man das Cavendish-Experiment derart, dass Interferenzerscheinungen dieser Gravitationswellen sichtbar werden könnten (denn wenn sie Wellennatur haben sollten, so müsste auch deren Interferenz festgestellt werden können). Man formt daher eine L-Anordnung, die wegen ihrer Ähnlichkeit zur **Michelson**-Apparatur zur Ätherbestimmung auch als „Interferometrischer Detektor von Gravitationswellen“ bezeichnet wird und folgende Gestalt hat: Man nehme ein kartesisches (x, y) – Koordinatensystem. Im Mittelpunkte dieses Systems werde eine „Eckmasse“ positioniert, rechts von ihr, in einem bestimmten Abstandspunkt A auf der x-Achse, sollte sich dagegen eine Masse mit einem befestigten Spiegel befinden. In einem anderen Abstandspunkt B auf der y-Achse, direkt „über“ der „Eckmasse“ sei das gleiche mit einem weiteren Reflexionsspiegel versehene Massenstück wie auf der x-Achse. Man nehme an, dass Abstandslängen A und B ungleich seien und stelle einen Photodetektor unter die „Eckmasse“ in irgendeinem frei wählbaren Koordinatenpunkt auf dem negativen y-Achsenteil. Der Laser befinde sich schließlich auf dem negativen x-Achsenteil, ebenfalls in einem freiwählbaren Koordinatenpunkt.
Nun wird das Koordinatensystem entfernt, sodass die eben beschriebene Apparatur klar vor Augen steht. In dieser Apparatur werden also Laser-Strahlen in beiden senkrecht zueinander stehenden Richtungen abgelenkt. Die Gravitationswellen bewirken dann die Änderung von beiden Abstandslängen A und B, sodass sie abwechselnd länger bzw. kürzer zueinander werden. Diese Längenänderungen verursachen dann auch verschiedene Ankunftszeiten, in denen Laserstrahlen aus beiden Ablenkungsrichtungen auf dem Rückwege nach der Reflexion den Photodetektor erreichen, sodass derselbe Photodetektor konsequente Änderung des Interferenzmusters registriert. Das beschriebene Experiment erbringt tatsächlich den geforderten indirekten Nachweis von Gravitationswellen, allerdings ist der Bestimmungs- und Messprozess sehr mühsam, da Längenänderungen von Abständen A und B im Größenbereiche 10^{-21} der Lichtwellenlänge liegen! Somit wäre die Existenz von Gravitationswellen auch experimentell gesichert.
Obschon Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie im Jahre 1915 entworfen wurde, konnten bisher zahlreiche Überprüfungen derselben durchgeführt werden, die die in sie hineingesteckte theoretische Meisterleistung nur noch eindeutiger unterstützt. Viele Phänomene, wie Gravitationswellen, „Verschmelzung“ von Schwarzen Löchern“ in Binärsystemen unter Freisetzung großer Energiemengen, die Spektralverschiebung (Rotverschiebung) der Lichtwellenlänge in Bereichen starker Gravitationsfelder etc. belegen die Korrektheit Einsteinscher Vorhersagen, die sich allerdings in unserem Sonnensystem häufig überhaupt nicht deutlich messen lassen und daher extremer Bedingungen im Gravitationsfelde bedürfen, zumindest von demjenigen Typus, wie man sie in unmittelbarer Umgebung von schwarzen Löchern vorfindet. Schwarze Löcher dürfen allerdings nicht nur aufgrund ihrer bereits in Unterkapiteln **3** und **4** angesprochenen, sogar von der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht erklärbaren Singularität als bedeutungsvoll für künftige Erforschung des Weltalls beachtet werden. Denn sie erlangen eine große Relevanz auch durch die neuesten Spekulationen von Astrophysikern, die sie als „Antreiber“ von Galaxien betrachten , und zwar in derselben Weise, wie Sterne selbst durch Nuklearfusion in ihrem Inneren „betrieben“ werden.
Statt allerdings zu spekulieren, wollen wir uns einigen Experimenten zuwenden, die als erste Verifizierungen der Allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet werden dürfen. Zuvor wäre es jedoch angebracht, etwas über den, wie Einstein sagt, „Prozess des Werdens einer Erfahrungswissenschaft“ (s. **[2]**, S. 82 – 83) zu sagen. Denn viele befinden sich im Unrecht, wenn sie die typisch empiristische Meinungseinstellung einnehmen und die Entwicklung der Wissenschaft als einen, vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus gesehen, fortgesetzten Induktionsprozess betrachten, der aus einer großen Menge bekannter, experimentell bestätigter Einzelerfahrungen durch deren gegenseitigen Vergleich verallgemeinerte Gesetze formuliert. Eine solche Deutung der Physik, die ja zu Erfahrungswissenschaften gehört, übersieht auch die Bedeutung der Intuition sowie der Deduktion für die Entdeckung neuer naturwissenschaftlicher Sachverhalte, die keinesfalls allein durch eine, um Einstein erneut zu bemühen, „ordnende Tätigkeit“ eingesehen werden können.
Denn aus besonderen Einzelergebnissen postuliert der Forscher, den wir uns einfach als einen Abstraktionisten vorstellen wollen, ein Gedankensystem, das meist auf wenigen, nicht weiter beweisbaren Grundsätzen (Axiomen) aufbaut und daher als Theorie bezeichnet wird. Denn die Berechtigung zur Aufstellung einer Theorie findet der Forscher in ihrer Grundeigenschaft, eine größere Anzahl von „Einzelerfahrungen“ zu verknüpfen, ohne dass jemals eine alle möglichen breiteren Theoriekomplexe umfassende „Supertheorie“ gefunden werden könnte. Natürlich kann es vorkommen, dass sich zur Erklärung eines Erfahrungskomplexes herangezogene Theorien untereinander unterscheiden können, genauso wie es nicht auszuschließen ist, dass mehrere Theorien bezüglich bestimmter Erfahrungen derart stark übereinstimmen, dass es in der Praxis schwer fällt Erfahrungen zu finden, die Propositionen der einen ihnen übergeordneten Theorie zu untersuchen erlauben, sodass auch Unterschiede einzelner Theorien untereinander auseinandergehalten werden können. Die hier beschriebene erfahrungswissenschaftliche Beziehung liegt im Vergleich prinzipiell ähnlich konzipierter Theorien der Gravitation Newtons und der Allgemeinen Relativität Einsteins, denn deren experimentelle Übereinstimmung geht sogar heute noch so weit, dass viel mehr Übereinstimmungsversuche gefunden werden können, als man Experimente durchzuführen

in der Lage ist, die eventuelle Deutungsdivergenz beider Theorien aufzeigen würden. Alle in folgendem Unterkapitel zu diskutierenden Experimente gehören jedoch eben denjenigen physikalischen Erfahrungsbereichen an, in denen Unterschiede zwischen der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Newtonschen Gravitationstheorie deutlich an den Tag gelegt werden können, weswegen wir sie anzusprechen gedenken.

7. Weitere Untersuchungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

(a) Die Lichtablenkung durch das Gravitationsfeld

Im Unterkapitel **2e)** wurde vermerkt, nach der Allgemeinen Relativitätstheorie müsse der Lichtstrahl durch ein nicht vernachlässigbares Gravitationsfeld eine Krümmung erfahren, der der Krümmung eines in demselben Gravitationsfelde geschleuderten Körper gleich käme, sodass der einen Himmelskörper passierender Lichtstrahl von diesem weg abgebogen würde. D.h. einen Stern, der, wäre die Sonne nicht vorhanden oder den Lichtstrahlen auf dem Wege stehen, würde man direkt als unendlich weit entfernten Punkt im Weltraum sehen. Nun soll zwischen dem Beobachter und dem beobachteten Stern die Sonne stehen. Der Stern, der sich immer noch im nämlichen „Weltallpunkt“ befindet, erscheint dem Beobachter dieses Mal als von seiner ursprünglichen (wahren) Position nach rechts hin verschoben. Dies bedeutet, die Lichtstrahlablenkung wird durch das Gravitationsfeld der Sonne sowie die damit zusammenhängende Raumkrümmung eben dieses Gravitationsfeldes verursacht und zwar so, dass bei einem Lichtstrahl, der in einem Abstand von Δ Sonnenradien an der Sonne vorbei geht, dieser Ablenkungswinkel α den Wert $\alpha = \dfrac{1,7\,\sec}{\Delta}$ **[5]** hat und der Lichtstrahl nach rechts von der Sonne hin abgebogen wird.

In der Praxis werden zur Prüfung dieses Sachverhaltes zunächst die Sterne in der Sonnenumgebung während einer Sonnenfinsternis fotografiert. Einige Monate später oder früher, wenn sich die Sonne an einer anderen Himmelsstelle befindet, wird eine zweite Fotographie derselben Sterne durchgeführt. Dann haben, wenn die obige theoretische Vorhersage stimmen sollte, die während der Sonnenfinsternis aufgenommenen Sternbilder gegenüber der zweiten Aufnahme radial nach außen, d.h. vom Sonnenmittelpunkt weg verschoben sein, und zwar genau um den dem Ablenkwinkel α aus **[5]** entsprechenden Betrag. Dieses Ergebnis wurde tatsächlich während der Sonnenfinsternis vom 30. Mai 1919 im Auftrag der Royal Society u.a. auch vom Astronomen Eddington, wie Einstein bescheiden feststellt, fast auf hundertstel Millimeter genau „befriedigend bestätigt“. Die kartesischen Koordinaten der beobachteten und berechneten Abweichungen der Sterne sind in unten stehender Tabelle 1 zusammengefasst (die Tabellendaten wurden dem Werke **[2]** [s. S. 86] entnommen).

Nummer des Sterns	*1. Koordinate*		*2. Koordinate*	
	beobachtet	**berechnet**	**beobachtet**	**berechnet**
11	– 0,19	– 0,22	+ 0,16	+ 0,02
5	– 0,29	– 0,31	– 0,46	– 0,43
4	– 0,11	– 0,10	+ 0,83	+ 0,74
3	– 0,20	– 0,12	+ 1,00	+ 0,87
6	– 0,10	– 0,04	+ 0,57	+ 0,40
10	– 0,08	+ 0,09	+ 0,35	+ 0,32
2	+ 0,95	+ 0,85	– 0,27	– 0,09

Tabelle 1: Mess- und Beobachtungsergebnisse von Sir Arthur Eddington vom 30. Mai 1919

(b) Die Perihelbewegung des Planeten Merkur

Newtons Gravitationsgesetz behauptet, ein einziger um die Sonne kreisender Planet würde um sie bzw. um den gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und des Planeten eine Ellipsenbahn beschreiben, wobei diese Ellipsenbahn als fix im Raume zu denken wäre, sodass die Sonne in einem der beiden Ellipsenbrennpunkte läge. Spannt man die Gedanken weiter aus, so ergibt sich, dass der Abstand zwischen der Sonne und dem betrachteten Planeten im Laufe eines Planetenjahres von einem Minimum (dem Perihel, dem Punkte auf der Ellipsenbahn des kleinsten Abstandes des Planeten von der Sonne) bis zu einem Maximum (dem sog. Aphel) anwächst, um wieder abzunehmen, bis der Perihel erneut erreicht ist und neuer Jahreszyklus der Planetenrotation beginnt.

Der Allgemeinen Relativitätstheorie zufolge soll in der Beschreibung der Rotationsbahn eines Planeten um die Sonne allerdings eine kleine rechnerische, vom Einflusse des vorhandenen Gravitationsfeldes der Sonne herrührende Abweichung von **Kepler** – Newtonschen Bahnbewegung derart berücksichtigt werden, dass der zwischen zwei Perihelpunkten der Umlaufbahn vom Radius zwischen der Sonne und dem Planeten beschriebene Winkel (im absoluten Winkelmaß natürlich) nicht 2π sondern $\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} = 2\pi \left[\frac{12\left(\frac{\pi a}{Tc}\right)^2}{(1-e^2)} \right]$ [6] beträgt. Hierbei bedeuten a die Große Halbachse der Ellipse, e deren Exzentrizität, c die Lichtgeschwindigkeit und T die Umlaufsdauer des Planeten um die Sonne. Aus dem Ausdruck [6] geht also hervor, dass nach der Allgemeinen Relativitätstheorie die Ellipse nicht, im Gegensatz zur Newtonschen Interpretation, fix ist, sondern dass deren Große Halbachse im Sinne der Bahnbewegung um die Sonne rotiert, wobei diese Drehung der Großen Halbachse für den Planeten Merkur 43'' (Bogensekunden) in 100 Jahren betragen und bei anderen Planeten unseres Sonnensystems unmerklich sein müsste. Diese Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde 1895 durch Messungen von **Leverrier** mit einer Fehlerbreite von einigen Bogensekunden eindrucksvoll bestätigt, womit sich bereits damals erklären ließ, weswegen die Newtonsche Gravitationstheorie, vom Merkur einmal abgesehen, für fast alle Umlaufbahnen der Planeten unseres Sonnensystems um die Sonne ziemlich gute Approximationen ihrer tatsächlichen geometrischen Form zulässt.

(c) Die Rotverschiebung der Spektrallinien

Im Unterkapitel **5a)** wurde gezeigt, dass in einem gegen ein Galileisches system K rotierenden Nicht-Inertialsystem K' die Ganggeschwindigkeit ruhender Uhren ortsabhängig ist. Diese Abhängigkeit ist hier quantitativ zu untersuchen.

Eine Uhr im Abstand r vom Scheibenzentrum hat relativ zu K die Rotationsgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit) v, die $v = \omega r$ [7] beträgt. Wenn v_0 die Ganggeschwindigkeit der in K ruhenden Uhr relativ zu K' symbolisieren soll, so folgt aus dem Zeitdilatationsgesetz der Speziellen Relativitätstheorie für die Ganggeschwindigkeit v der mit der Geschwindigkeit V relativ zu K bewegten, in K' dagegen ruhenden Uhr $v = v_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ [7a], woraus sich für kleine V-Werte mittels der Taylorentwicklung 1. Ordnung $v = v_0\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$ [7b] bzw. über [7] der Ausdruck $v = v_0\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{2c^2}\right)$ [7c] ergibt.

Bezeichnet man mit dem Symbol $+\Phi$ die Potentialdifferenz der Zentrifugalkraft zwischen der Uhr an der Scheibenperipherie sowie dem Mittelpunkt derselben und interpretiert diese negativ genommene Arbeit, die entgegen der Zentrifugalkraft der Masseneinheit zuzuführen hat, um sie von der Peripherie der bewegten Scheibe bis zu ihrem Mittelpunkt zu transportieren, so ergibt sich die Beziehung $\Phi = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$ [7d], mittels der sich [7c] auch als $v = v_0\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right)$ [7e] aufschreiben lässt, so erkennt man bereits aus dieser letzten Relation, dass zwei gleichbeschaffene Uhren in unterschiedlichem Abstand vom Scheibenmittelpunkt unterschiedlich schnell laufen, und dieses Ergebnis soll natürlich ebenso von der Perspektive des rotierenden Beobachters gültig sein. Da die Scheibe einem Gravitationsfeld unterliegt, zumindest vom Standpunkte des Beobachters in K' aus beurteilt, so ist die Beziehung [7e] für alle Gravitationsfelder relevant, sodass, wenn man ein Spektrallinien emittierendes Atom als eine Uhr betrachtet, als Schlussfolgerung behauptet werden dürfte, ein Atom absorbiere oder emittiere eine vom Potential des Gravitationsfeldes, in dem es sich befindet, abhängige Frequenz. D.h. aber, dass die Frequenz eines Atoms, das sich an der Oberfläche eines großen Himmelskörpers befindet, ein wenig niedriger ist als die Frequenz eines Atoms des gleichen Elements, das an der Oberfläche eines kleineren Weltkörpers oder aber im Weltraume zu finden wäre. Da für das Potential Φ des Gravitationsfeldes eines Himmelskörpers betragsmäßig die Identität $\Phi = \frac{-GM}{r}$ [7f] zutrifft, wobei G die Gravitationskonstante, M die Masse und r den Radius des betrachteten Himmelskörpers bedeuten sollten, müsste beispielsweise eine Rotverschiebung der an der Oberfläche von Sternen erzeugten Spektrallinien gegenüber den an der Erde generierten den Betrag $\frac{v-v_0}{v_0} = -\frac{KM}{c^2 r}$ [7g] haben. Dabei geht [7g] einfach durch das Einsetzen von [7f] in [7e] ein hervor und wurde anfangs der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts durch Hubbles Bestätigung der Rotverschiebung von Galaxien bekräftigt. Die hiermit gelieferte Evidenz der Rotverschiebung von Spektrallinien des Lichtes erweist sich nicht nur als eines der bedeutendsten experimentellen Ergebnisse, die zur Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie entscheidend beigetragen hatten. Sie erlaubt es, Konsequenzen über die geometrische sowie physikalische Struktur der Realität zu ziehen, die neue Gedankenhorizonte eröffnen und im nächsten und abschließenden Kapitel **8** vorliegender Ausarbeitung kosmologisch behandelt werden sollen.

8. Fazit

(a) Schwierigkeiten der Newtonschen Gravitationstheorie auf kosmologischer Kontemplationsebene

Eine weitere Komplikation, die der Newtonschen Gravitationstheorie, neben der im Unterkapitel **2d)** besprochenen, anhaftet, betrifft die Art und Weise, wie die Welt (das physikalisch Reale) überhaupt zu denken ist. Nimmt man an, die Welt sei räumlich und zeitlich unendlich, wobei deren Materiedichte im Durchschnitt überall gleich sein sollte, so kollidiert eine derartige Vorstellung mit der Newtonschen Voraussetzung, die Welt müsse eine Mitte mit einer von dieser Mitte radial nach außen abnehmenden maximalen Sternendichte haben, sodass weit draußen, hinter einem bestimmten „Horizont“ unendliche Leere folge. Diese Weltvorstellung Newtons ist mehr als unbefriedigend, da eine solche Welt mit der im Endlichen (hauptsächlich um die „Mitte“ herum konzentrierten) beschränkten Materiedichte ρ_0 mit stetiger Fortwanderung von kosmologischen Objekten ins Unendliche konsequent „verarmen“ müsste, da diese konstante Materiedichte von einem Kugelvolumen V umschlossen werden könnte, was der „Weltmasse“ $\rho_0 V$ entspräche und für den die Oberflächenstärke dieser Welt den zu der Größe $\rho_0 R$ proportionalen Wert hätte. Eine derartige Oberfläche, deren Feldstärke mit wachsendem Kugelradius R zunähme, ist jedoch schlicht unmöglich. Um dieser Konsequenz zu entgehen, modifizierte Seeliger das Newtonsche Gravitationsgesetz so, dass dieses stärker als nach dem Gesetze des inversen Abstandsquadrats abnehmen sollte und damit die Möglichkeit einer im ganzen Weltall konstanten Materiedichte offen ließe.

Dagegen bewegten sich die Überlegungen von **Helmholtz** und **Poncare** in die Richtung der Konzipierung einer zunächst paradox anmutenden endlichen und dennoch grenzenlosen Welt. Dabei machten die beiden angeführten Mathematiker von folgendem „Gedankenexperiment“ ausgiebigen Gebrauch: Man stelle sich flache Geschöpfe, die sich nur innerhalb einer unendlich ausgedehnter Ebene (ihrer flachen kausal abgeschlossenen Welt) bewegen könnten, wobei außerhalb derselben nichts existierte. Solche Geschöpfe wären in diesem Fall völlig zu der Annahme berechtigt, ihre Welt sei „eben“, was so viel bedeuten sollte, dass auf diese glatte Ebene unsere starre Quadratnetzkonstruktion aus dem Unterkapitel **5b)** ausgebreitet werden könnte, die das Anlegen eines der euklidischen Geometrie gehorchenden kartesischen Koordinatensystems mit einer genau festgelegten Definition der „Strecke“ erlauben würde. Befände sich diese endlose Fläche mit denselben flachen Geschöpfen jedoch auf einer Kugeloberfläche, so wäre es nun für diese Geschöpfe unmöglich, von euklidischer Streckendefinition auszugehen und deren eigene Welt als euklidisch zu betrachten. Denn beim Versuch, eine Gerade auf der Kugeloberfläche durch das Befolgen ihrer Krümmung mit starren infinitesimal kleinen Einheitsstäben zu realisieren, würde sich eine geschlossene, rektifizierbare (messbare) geodätische Linie ergeben, die die ursprüngliche euklidische Gerade auf einer der Gaußschen Geometrie unterworfenen Kugeloberfläche ersetzen könnte. Auch diese Kugelwelt müsste eine endliche Fläche haben, ohne jedoch begrenzt zu sein, was zur Schlussfolgerung führt, die Welt unserer flachen Geschöpfe sei in der Tat endlich und dennoch grenzenlos, da beim Durchmessen von Geodäten man stets zum Anfangspunkt der Ausmessung gelangt.

Um zu bestätigen, dass sie in keiner euklidischen Welt wohnen, müssen unsere hypothetischen flachen Geschöpfe von einem Oberflächenpunkt nur nach allen Richtungen „gerade Strecken“ ziehen, bis sich diese zu Geodäten schließen, deren Radius dem Kugelradius R entspräche. Nun muss man auf der Kugeloberfläche lediglich gewöhnliche Kreise vom frei wählbaren Radiuswert *r* aufzeichnen und das Verhältnis des mit einem Einheitsstäbchen gemessenen Radiusdurchmessers zu dem mit denselben Einheitsstäbchen gemessenen Kreisumfangs berechnen, das in der euklidischen Geometrie π , in der nicht-euklidischen Geometrie allerdings einen kleineren Wert $\pi \frac{\sin\left(\frac{r}{R}\right)}{\left(\frac{r}{R}\right)}$ **[8a]** haben soll, dies umso deutlicher, je größer der beliebig wählbare Kreisradius *r* des auf der Kugelweltoberfläche gezeichneten Kreises im Vergleich zum festen Geodätenradius R dieser „Kugelwelt“ gewählt wird. Offenbar könnten die flachen Geschöpfe aus der Beziehung **[8a]** den Radius R ihrer „Kugelwelt“ bestimmen, selbst wenn ihnen ein relativ kleiner Teil ihrer Kugelwelt für Messungen zur Verfügung stünde. Allerdings dürfte der betrachtete Teil der Kugeloberfläche nicht allzu klein sein, da in äußerst kleinen Gebieten Gaußsche Koordinatensysteme die notwendige Eigenschaft aufweisen, sich euklidisch zu verhalten, womit die Geschöpfe nicht mehr eindeutig konstatieren könnten, ob sie auf einer Kugel- oder aber auf der euklidischen Ebenenoberfläche wohnhaft sind, ein Effekt, dem wir bereits im Unterkapitel **5c)** begegnet sind. Ähnlich ist es um die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit unserer Welt bestellt, solange wir uns selbst in die Rolle flacher Geschöpfe hineinversetzen, um vielleicht einzusehen, dass der unserer Empirie zugängliche „Weltallradius" möglicherweise zu klein ist gegenüber deren eigentlicher Ausdehnung.

Nichts bringt uns allerdings davon ab, unsere Welt wie Riemann als der zweidimensionalen Kugeloberfläche in der Form eines dreidimensionalen Analogons gegenüberstehenden Sphäre zu behandeln, auf der die Euklidizität einfach dadurch zu testen wäre, dass man mittels ihren Radius' R die ihr zukommende Oberflächen- bzw. Volumengröße (F bzw. V) determiniert und feststellt, ob diese gleich oder kleiner als $F = 4\pi R^2$ bzw. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ sind. Nur im Falle einer Gleichheit kann Euklidizität zweifellos „diagnostiziert" werden, sonst ist die Riemannsche Sphäre als „Weltmodell" nicht mehr zu bestreiten. Zugegebenermaßen hat die Welt überhaupt nicht zwingend „sphärisch" zu sein. Man könnte sie sich mit gleichem Rechte als einen „elliptischen" Raum denken, der als eine zentrisch symmetrische Abart dieser Sphäre aufgefasst werden könnte, und zwar derart, dass die „Gegenpunkte" ihrer „Geodäten" zusammenfallen. Denn sowohl das sphärische als auch das elliptische Modell wären aufgrund ihrer konstanten Krümmung als mögliche Weltbeschreibungen völlig gleichberechtigt, da auf Kugel- und Ellipsenoberflächen, im Vergleich zu anderen beliebigen Flächentypen, alle Punkte zueinander gleichwertig sind, was die Isotropie der Raumstruktur wahrt, selbst wenn diese in der Allgemeinen Relativitätstheorie, wie noch im letzten Unterkapitel **8b)** einzusehen sein wird, gewisse realitätsbezogene Änderungen erleiden muss.

Indem man der Vorstellung nachgibt, geschlossene Räume ohne Grenzen seien denkbar, und dem sphärischen bzw. elliptischen Raume gegenüber allen anderen potenziellen Raumstrukturmodellen den berechtigten Vorzug gibt, erhebt sich für Astronomen und Physiker eine äußerst intrigante Frage, ob die Welt, in der wir leben, unendlich oder im Sinne des sphärischen Modells endlich sei. Die Allgemeine Relativitätstheorie vermag tatsächlich höchst interessante Beantwortungsalternativen dieser Frage vorzuweisen, selbst wenn deren Richtigkeit vom Standpunkte gegenwärtiger physikalischer Erkenntnis nicht eindeutig feststellbar sein sollte.

In seinen Betrachtungen zu dieser Problematik geht Einstein von der Tatsache aus, dass in der Allgemeinen Relativitätstheorie Raumeigenschaften durch die Anwesenheit der Materie bedingt werden, sodass man über geometrische Raumstruktur nur unter Voraussetzung eines bekannten Materiezustands konkrete Schlüsse ziehen, was zunächst auf zweierlei Arten durchführbar ist: Einerseits nimmt man zunächst die Materieverteilung im Universum, aufgrund ihrer gegenüber der Lichtausbreitung vernachlässigbaren Bewegungsgeschwindigkeit, als ruhend an und versucht, sich mit der Ansicht einer der euklidischen Geometrie gehorchenden Welt zufrieden zu geben. Dass eine solche Welt der Euklidizität nicht exakt entsprechen kann, wird bereits von der Eigenschaft verursacht, dass Massen die „Raummembran", wenn auch nicht allzu drastisch, „krümmen", womit die Welt eigentlich als eine der, wie Einstein behauptet, „gekräuselten Seeoberfläche" gliche und daher als quasi-euklidisch aufzufassen wäre (s. **[2]**, S. 75). Legt man der Welt euklidischen Geometriecharakter zugrunde, so ergeben allerdings relativistische Gravitationsfeldgleichungen, dass die Materiedichte einer derartigen Welt Null sein müsste, ein Resultat, das die oben angesprochene „Newtonsche Leere" böte, der wir geradezu zu entgehen trachten. Nimmt man andererseits eine von Null abweichende mittlere Materiedichte des Universums an, so müsste die Welt nicht quasi-euklidische sondern, aufgrund ungleicher Materieverteilung, quasi-sphärische (bzw. quasi-elliptische) Form haben, in beiden Fällen hätte sie allerdings sicherlich endlich zu sein. Diese Endlichkeit der Welt verleitet Einstein dazu, einen einfachen Zusammenhang zwischen der räumlichen Weltausdehnung und deren mittlerer Materiedichte aus der Allgemeinen Relativitätstheorie herzuleiten, der in der Formel

$R^2 = \frac{2}{k\rho}$ **[8b]** zum Ausdruck kommt (in dieser Formel soll R natürlich den „Weltradius", ρ dagegen die mittlere Materiedichte repräsentieren, und, unter Verwendung des CGS-Systems, die Konstante $2/k$ den Wert $2/k = 1,08*10^{27}$ haben).

Diese Betrachtung erweist sich als korrekt, wenn man mit Einstein annimmt, dass

1. eine von Null verschiedene mittlere Materiedichte existiere, die im ganzen „Weltraume" dieselbe sei, und
2. der „Raumradius" („die Größe des Raumes") zeitunabhängig sei.

Diese zwei Hypothesen erweisen sich nur dann als mit Postulaten der Allgemeinen Relativitätstheorie vereinbar, wenn man eine kosmologische Feldkonstante einführt, um die Raumexpansion zu verhindern, was Einstein tatsächlich tat und später als seinen größten Fehler betrauerte. Denn bereits in den 20er Jahren wies der russische Mathematiker **Friedman** nach, dass die zweite Hypothese unter der Annahme eines zeitabhängigen Radius verworfen werden kann, was die Expansion des „Weltraums" faktisch erzwingt. Diese Raumexpansion wurde durch Hubbleschen Nachweis der Rotverschiebung der von extragalaktischen Nebeln zu uns ausgesandten Spektrallinien im Sinne der **Doppler**-Verschiebung bestätigt und fundiert die gegenwärtige Vorstellung des aus einem Big Bang hervorgegangenen Universums, dessen Sternsysteme im Großen expandieren. Ob und wann diese Expansion aufhören und sogar umgekehrt wird, darüber kann lediglich spekuliert werden.

Bevor wir allerdings zum Abschluss unserer durch die im Unterkapitel **6d)** durchgeführte Charakterisierung des Feldbegriffs angefachten Diskussion der Raumstruktur im nächsten Unterkapitel übergehen, ist es immer lohnenswert anzumerken, dass die theoretische Vergleichsinkongruenz zwischen der statischen Raumhypothese und der Konzeption des expandierenden „Weltraumes" sogar soweit getrieben werden kann, dass aus der ersten die Endlichkeit (Geschlossenheit) des Raumes notwendig resultiert, während die zweite zusammen mit empirischen Daten astronomischer Beobachtungen keine zwingende Unendlichkeit zu antizipieren braucht.

(b) Die Struktur des Raumes

Es muss eine ungeheuere Zumutung bedeuten, sich den Raum als eine physikalische Realität vorzustellen, so wie es die Anhänger Newtons hatten tun müssen, allem voran den leeren Raum, gegen den sich Descartes haarsträubend durch Argumentation wehrt, dass Raum wesensgleich mit der an materielle Körper gebundenen Ausdehnung sei und somit ohne diese überhaupt nicht gedacht werden könne, was die Existenz des leeren Raumes ausschließe. Diese Argumentation schien lange durch die Entdeckung des Vakuums widerlegt worden zu sein, denn obwohl unsere Raumvorstellung aus der Erfahrung stammt, gibt es keine zutreffenden Gründe, ihn nicht abstrakt verwenden zu dürfen. Dennoch lässt die Allgemeine Relativitätstheorie die angeführte Argumentation Descartes in neuem Lichte „auferstehen", was eben nun verdeutlicht werden soll.
Der psychologische Ursprung des Raumbegriffes kann mit einer Konfrontation mit einer (begrenzten) Schachtel verglichen werden, die einen bestimmten „Rauminhalt" ausfüllt, beliebig groß (somit auch potenzial unendlich) sein kann und als „leer" betrachtet werden darf, sobald in ihr keine ponderablen materiellen Körper positioniert sind, denen bestimmte Lagerungsmöglichkeiten eingeräumt werden können. Diese Lagerungsmöglichkeiten sind genauso real (objektiv) wie die ihnen unterliegenden Gegenstände und die Schachtel selbst, sodass ich mich, als Verfasser dieser Zeilen, Einstein in seiner Ablehnung der von Kant ausgehenden Leugnung der Raumobjektivität zuzustimmen bereit fühle (s. **[2]**, S. 93). Denn inobjektiv (unwirklich) sind lediglich die Abstraktionen materieller Formen, die mathematische Gesetze konstituieren und zur Definition euklidischer und nicht-euklidischer Geometrien beitragen. Diese Abstraktionen sind allerdings von entscheidender Bedeutung für das fortschreiten einer „messenden Wissenschaft", als die die Physik betrachtet wird, die alle Naturerscheinungen ohne psychologisches Einmischen des Forschenden zu deuten versucht. Für Emotionen gibt es und darf es im Kausalitätsnexus der Physik keinen Platz geben, denn erst die von **David Hume** und Mach klar erkannte Einsicht, dass Abstraktionen ursprünglich an das Materielle angebundener Formen in Wirklichkeit unabhängig von diesem gedacht werden können, ja sogar gedacht werden *müssen*, führt auch Descartes trotz seiner Ablehnung des leeren Raumes dazu, den Raumbegriff im Rahmen der Entwicklung seiner Analytischen Geometrie anzuwenden.
Mach spielte sogar ernsthaft mit dem Gedanken, in Anlehnung an den Atomismus, den Raum gänzlich abzuschaffen und als "Gesamtheit gegenwärtiger Distanzen aller materiellen Punkte" neu zu definieren, was ihn bekanntlich zur Aufstellung des Machschen Trägheitsprinzips (s. Unterkapitel **2b)**) führen sollte. Dennoch fühlte sich selbst hinsichtlich der atomistischen Unendlichkeit des (kontinuierlichen) Raumaufteilens keiner wirklich bereit, auf den Raumbegriff zu verzichten, aus dem einfachen Grunde, wie später der einzigartige Niels Bohr verdeutlichen sollte, weil Atome als etwas Unteilbares und der Raumbegriff, der als Kontinuum diese Aufteilungsmöglichkeit geradezu fordert, zueinander komplementäre Beschreibungsarten des physikalisch Realen darstellen, die sich gegenseitig sogar „zerstören" und nimmer gleichzeitig als Klärungsgrundlagen herangezogen werden können. D. h. je nachdem, ob ich Atome als nicht teilbar betrachte oder sie weiterhin teile, bewege ich mich entweder im Erkenntnisbereiche der Chemie oder aber der Quantenphysik, wobei eine der beiden Realitätsbeschreibungen zugunsten des gerade zu untersuchenden Gegenstandes (der chemischen Reaktionen oder aber der Elementarteilchentheorie) aufgegeben werden müssen, simultan können sie keine Geltung in Anspruch nehmen.
Nicht zuletzt wurde die Subtilität des Raumbegriffes auch durch die Entdeckung erhöht, dass es in der Realität keine völlig starren Körper gibt, was sich entsprechend in abstrakter Konstruktion der Gaußschen Koordinatensysteme niedergeschlagen hatte. Dies bedeutet jedoch, dass euklidisch oder nicht-euklidisch definierte geometrische Konstruktionen, die Lagerungsmöglichkeiten materieller Körper beschreiben, niemals völlig losgelöst von diesen deuten, sondern der empirische Gehalt der Geometrie lasse sich, wie Einstein korrekt behauptet, lediglich im Rahmen der gesamten Physik angeben und prüfen (vgl. **[2]**, S. 97). Sogar die Einsicht, jedem der unendlich vielen zueinander bewegten Körper innerhalb einer endlosen „Schachtel" lasse sich jeweils ein ihm eignendes Koordinatensystem zuordnen, zu dem der betreffende Körper ruht und es in der „Schachtel" auch unendlich viele „Teilräume" geben könnte, von denen die Spezielle Relativitätstheorie ausgiebigen Gebrauch macht, erweist sich beim genaueren Überdenken als nicht unbedingt ostentativ.

Selbst dem Zeitbegriffe ergeht es nicht besser, da dieser vom psychologisch und empirisch definierten intellektuellen Akt des „Sich-Erinnerns“ die abstrakte Stufe eines homogenen Kontinuums erreicht, der sogar der logischen „Erlebnisreihenfolge“ gehorcht (z.B.: „wenn sich Erlebnis A später als Erlebnis B ereignet und ein weiteres Erlebnis C später als A, so geschieht auch C später als A“) und mit dieser in bestimmten Fällen, wie beispielsweise beim Vergleich akustisch festgelegter zeitlicher Ordnung von Erlebnissen mit deren visuell gewonnener zeitlicher Ordnung, sogar differieren kann. Um jedoch zu einer Objektivierung des Zeitbegriffes bedarf es jedoch seiner unzertrennlichen Verknüpfung mit dem Raumbegriffe, die erst in der Speziellen Relativitätstheorie hergestellt hatte, denn ein Ereignis ist auch im Raume lokalisiert, nicht nur in der Zeit.
Die Allgemeine Relativitätstheorie definiert jedoch sogar dieses Raum-Zeit-Kontinuum dadurch neu, dass sie den bereits besprochenen *Feldbegriff* aus der Elektrodynamik aufgreift und ihn sogar als für die ganze Physik gültige Abstraktion des materiellen Körpers interpretiert, eine bahnbrechende, wahrlich schwerwiegende Ansicht! Um sie klar zu deuten, müssen wir stets klar bedenken, dass die Allgemeine Relativitätstheorie dem Bedürfnis entsprungen ist, die Gleichheit der schweren und trägen Masse zu begreifen. Schauen wir uns daher ein Inertialsystem S an, dessen Raum als „physikalisch leer“ betrachtet werden soll. In diesem Raum sollen also weder Materie noch Feld vorhanden sein. Bezogen auf S sei nun ein zweites Bezugssystem S’ gleichförmig beschleunigt und somit kein Inertialsystem. In Bezug auf S’ würde sich daher jede Probemasse, unabhängig von ihrer Beschaffenheit beschleunigt bewegen, weswegen man sagt, relativ zu S’ bestehe ein Gravitationsfeld. Jedoch bereits das Miteinbeziehen des Gravitationsfeldes in unsere Betrachtung lässt das Inertialsystem seine objektive Bedeutung verlieren, natürlich unter Voraussetzung, dass das Äquivalenzprinzip der schweren und trägen Masse auf beliebige Relativbewegungen der Bezugssysteme ausgedehnt werden könnte.
Vierdimensional betrachtet wird der Übergang zwischen Systemen S und S’ durch eine auf Gaußsche Koordinatensysteme bezogene nichtlineare Transformation von vier Koordinaten gewährleistet, die als entsprechende Verallgemeinerung der Lorentztransformation angesehen werden darf. Wie diese Transformation auszusehen hat erkennt man am einfachsten daran, dass ruhende „starre Strecken“ und „Maßstäbe“ in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht verwendet werden können, wenn es darauf ankommt, das Verhalten beschleunigter Bezugssysteme (wie in unserem Beispiel S’) aus der Sicht Galileischer Bezugskörper (hier des Bezugssystems S) mittels der Postulate der Speziellen Relativitätstheorie zu deuten. Ist dies jedoch der Fall, so drücken die „Molluskenkoordinaten“ des zugrundeliegenden Gaußschen Koordinatensystems zwar das Kontinuierliche sowie den Grad des betrachteten Raumes aus, sagen allerdings nichts mehr über dessen metrische Eigenschaften aus. Daher wird man vom Allgemeinen Relativitätsprinzip dazu verführt, die „Molluskentransformationen“ mittels beliebiger stetiger (kontinuierlicher), in vorliegender Ausarbeitung nicht mathematisch genau präzisierbarer nichtlinearer Transformationen zu deuten, sodass Naturgesetze im Bezuge auf sie kovariant (transformationsinvariant) bleiben und die einfachste mögliche Form annehmen.
Im gerade angesprochenen Gedankengang ist auch die wichtigste Eigenschaft des physikalischen Feldes enthalten, nämlich dessen Ersatzrolle der Materie gegenüber, wobei dieser „Ersatz“ im Sinne völliger Anwendungsgleichwertigkeit beider *selbständiger* Begriffe zu verstehen ist. Denn zur Deutung das beschleunigte Bezugssystem S’ beherrschender Verhältnisse wurde der Begriff des Gravitationsfeldes angewandt, ohne dass die Frage nach der Existenz von Massen überhaupt hatte aufgeworfen werden müssen. Eines besseren Paradebeispiels der Selbständigkeit des physikalischen Feldbegriffes gegenüber der Materie bedarf man nicht, da selbst das Allgemeine Relativitätsprinzip gute Gründe zur Annahme hervorbringt, dass der anfangs seitens der Speziellen Relativitätstheorie für „feldfrei“ erklärte vierdimensionale Minkowski-Raum in Wirklichkeit einen naturgesetzlichen, denkbar einfachsten Sonderfall des reinen (durch Verallgemeinerung der Lorentztransformation beschreibbaren) Gravitationsfeldes darstellt. Dieser „Sonderfall“ des reinen (schwächer verallgemeinerten) Gravitationsfeldes ist dann bezüglich seiner metrischen Eigenschaft durch charakterisiert, dass $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ **[8c]** als dem Pythagoreischen Satze entsprechende Abstandsquadrik dem Quadrat des mit einem Einheitsmaß gemessenen räumlichen Abstandes zweier infinitesimal benachbarter Punkte einer dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit des vierdimensionalen Kontinuums, der Term dx_4^2 **[8d]** dagegen dem mit geeignetem Zeitmaß gemessenen zeitlichen Abstand zweier Ereignisse identischer Ortkoordinaten $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ entspricht. Erst die Zusammenführung der Ausdrücke **[8c]** und **[8d]** führt auf die auf die Lorentztransformation hinweisende spezialrelativistische Abstandsquadrik $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$ **[8e]** mit objektiver metrischer Bedeutung, die sich mathematisch in deren Invarianz gegenüber der Lorentztransformation manifestiert.
Unterwirft man den Minkowski-Raum im Sinne des Allgemeinen Relativitätsprinzips einer beliebigen stetigen Koordinatentransformation, so dürfte diese in allgemeiner Form $ds^2 = \sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} g_{ik}dx_i dx_k = g_{ik}dx_i dx_k$ **[8f]** ausgedrückt werden, wobei der Einsteinschen Summenkonvention zufolge die Indizes i und k alle Zahlenpaarkombinationen 11, 12, … bis 44 zu durchlaufen haben. Dabei sind g_{ik}, wie schon vermerkt, nicht Konstanten (sie sind es nur im Falle des „feldfreien“ Minkowski-Raums), sondern durch willkürlich gewählte Transformati-

on determinierte Funktionen neuer Molluskenkoordinaten, die nicht willkürlich sondern als Funktionen mit Absicht formuliert werden, dass die Form [8f] durch eine stetige Transformation der vier Koordinaten wieder in die Form [8e] zurücktransformiert werden kann. Dies kann allerdings nur dann garantiert werden, wenn Funktionen g_{ik} bestimmte, von Riemann aufgestellte kovariante Bedingungsgleichungen (sog. Riemann-Bedingungen) erfüllen, da nach dem Äquivalenzprinzip [8f] nur dann ein dem reinen Gravitationsgesetze genügendes Gravitationsfeld spezieller Art in kovarianter Form beschreibt, falls die g_{ik} die Riemann-Bedingungen erfüllen. Damit steht fest, das eine sogar das reine (schwächer verallgemeinerte) Gravitationsgesetz generalisierende verallgemeinerte Gravitationstheorie zweierlei simultan zu leisten hat: sie muss zwar die Riemann-Bedingungen erfüllen, jedoch so, dass sie schwächer mathematisch einschränkt als es die Riemann-Bedingungen tun. All diese Forderungen werden tatsächlich erfüllt durch einen geplanten Verzicht auf die unten noch zu besprechende Symmetrie-Eigenschaft [8g] des reinen Gravitationsfeldes.

Endlich sind wir bereit, die Descartes'sche Ablehnung der Existenz des „leeren Raumes" unter einem neuen Aspekt zu betrachten und somit auch einzusehen, wie die Allgemeine Relativitätstheorie den Raumbegriff modifiziert. Denn der klassischen Mechanik und der Speziellen Relativitätstheorie zufolge hat der Raum (die Raum-Zeit) eine selbständige Existenz im Bezug auf die Materie bzw. das Feld (das „Raum-Erfüllende"), da man dieses koordinatenabhängige „Raum-Erfüllende" nach Newton nur dann beschreiben könne, wenn die Raum-Zeit bzw. das Inertialsystem mit seiner Metrik als „Bühne physikalischer Vorgänge" als gegeben vorausgesetzt werde, was so viel hieße wie: dächte man sich das Raum-Erfüllende (z. B. das Feld) weg, so bliebe immer noch der metrische Raum gemäß [8e] übrig, der auch für das Trägheitsverhalten eines in ihn hineingebrachten Probekörper maßgeblich wäre. Dagegen eignet in der Allgemeinen Relativitätstheorie dem Raume gegenüber dem koordinatenabhängigen „Raum-Erfüllenden" keine Sonderexistenz, da, denkt man sich ein reines, durch g_{ik} – Koordinatenfunktionen beschriebenes, als Lösung von wohldefinierter Gravitationsgleichungen interpretierbares Gravitationsfeld weggenommen, so bleibt nicht ein Raum vom Typ [8e], sondern *überhaupt nichts* übrig, nicht einmal „topologischer Raum", da Funktionen g_{ik} nicht nur das Gravitationsfeld beschreiben, sondern gleichzeitig auch topologische und metrische Raumstruktureigenschaften der betrachteten Mannigfaltigkeit, als die dieses Feld auch aufgefasst werden darf, eindeutig bestimmen. Ein Raum vom Typ [8e] ist also im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht ein feldloser Raum (Kontinuum), sondern ein Spezialfall des g_{ik} – Feldes, für welchen die Funktionen g_{ik} bezüglich des unseren Betrachtungen zugrundegelegten Koordinatensystems koordinatenunabhängige, konstante Werte haben. **Einen „leeren" (feldleeren) Raum kann es nicht geben, selbst dann nicht, wenn dieser Raum, wie z. B. das Vakuum, „materiefrei" im Newtonschen Sinne wäre!**

Erst wenn man die Descartes'sche Ablehnung des „leeren Raumes" auf die eben geschilderte Art liest, wird ihre intuitiv richtige, grandiose Kernaussage, die, solange man das physikalisch Reale ausschließlich im Sinne der klassischen Mechanik in ponderablen materiellen Körpern erblickt, völlig absurd erscheinen mag, durch die Idee des Feldes als Darsteller des Realen in Verbindung mit dem Allgemeinen Relativitätsprinzip in all ihrer Wahrheitspracht aufgezeigt.

Wir schließen unsere allgemeinwissenschaftlichen Betrachtungen über die Allgemeine Relativitätstheorie mit einem letzten Hinweis über die mathematische Beschreibung der reinen Gravitationstheorie ab, die ich dem Leser im Unterkapitel **6c)** schuldig geblieben bin. Die Theorie des reinen (schwächer verallgemeinerten) Gravitationsfeldes erweist sich in der Allgemeinen Relativitätstheorie erweist sich deswegen als leicht annehmbar, weil man davon ausgehen darf, dass der durch die im Ausdrucke [8e] verkörperte Metrik charakterisierte „feldfreie" Minkowski-Raum, der, wie wir sahen, eigentlich gar nicht feldleer sein kann, den allgemeinen Feldgesetzen genügen muss. Durch die Verallgemeinerung der Lorentztransformation ergibt sich aus dem Minkowski-Raum eine dem reinen (schwächer verallgemeinerten) Gravitationsgesetze entsprechende „Bezugsmolluske". Eine weitere Verallgemeinerung sogar dieses reinen Gravitationsgesetzes, aus dem das (stärker) verallgemeinerte Gravitationsgesetz (die verallgemeinerte Gravitationstheorie) hervorgehen soll, erreicht man Einstein zufolge dadurch, dass die die Herleitung des reinen, durch Funktionen g_{ik} beschriebenen Gravitationsgesetzes aus dem „feldleeren" Minkowski-Raume prägende Symmetrie-Eigenschaft $g_{ik} = g_{ki}$ [8g] (mit $g_{12} = g_{21}$ usw.) in Ausdrücken [V] und [8f] aufgegeben wird. Somit gliche das verallgemeinerte Gravitationsfeld dem reinen, durch die Symmetrieeigenschaft nicht eingeschränkten Gravitationsfelde, sodass auch dessen Herleitung der Verallgemeinerung des im Unterkapitel **5c)** besprochenen, für Minkowski-Räume relevanten Transformationssonderfalls nach Lorentz völlig analog verliefe. Ob sich durch geschilderte Verallgemeinerungsprinzipien von Feldgesetzen irgendwann auch die Große Vereinigung aller vier Fundamentalkräfte im Rahmen eines noch allgemeineren Feldgesetzes mathematisch formulieren ließe, wie Einstein hofft (und eine solche Hoffnung lebenslang gehegt hatte, s. **[2]**, S. 108 – 109), mag als zukunftsträchtige Problematik, im Hinblicke auf den gegenwärtigen Erkenntnisstand der Theoretischen Physik, vorerst dahingestellt bleiben.

9. Bibliographie

[1] Begelman, Mitchell / Rees, Martin: „*Gravity's fatal Attraction*", Scientific American Library 1998.
[2] Einstein, Albert: „*Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*", Springer-Verlag 2001.
[3] Einstein, Albert: „*Grundzüge der Relativitätstheorie*", Springer-Verlag 2002.
[4] Freund, Jürgen: „*Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*", vdf – Hochschulverlag, Zürich 2005.
[5] Goldstein, Herbert / Poole Jr., Charles P. / Safko, John L.: „*Klassische Mechanik*", Wiley-VCH, 2006.
[6] Misner, Charles M. / Thorne, Kip S. / Wheeler, John A.: „*Gravitation*", W. H. Freeman and Company, 2003.
[7] Nolting, Wolfgang: „*Grundkurs Theoretische Physik, Band 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*", Springer-Verlag 2002.
[8] Rindler, Wolfgang: "*Introduction to Special Relativity*", Oxford University Press 1991.
[9] Rindler, Wolfgang: "*Relativity: Special, General, and Cosmological*", Oxford University Press, 2001.
[10] Schröder, Ulrich E.: „*Gravitation – Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*", Verlag Harri Deutsch 2004.
[11] Weizsäcker, Carl F. v.: „*Zum Weltbild der Physik*", S. Hirzel – Verlag Stuttgart 1976.
Anmerkung: Als Einführung in die Grundgedanken der Allgemeinen Relativitätstheorie äußerst geeignet stellen sich in der obigen Auflistung insbesondere Einsteins und Goldsteins Meisterwerke sowie Freunds Einführungskurs in die Spezielle Relativitätstheorie (aufgrund der informationsreichen Diskussion von Vierer-Vektoren) bzw. Rindlers Ausarbeitungen über die Relativitätstheorie im Generellen heraus. Des Weiteren dürfte Nolting als konzises Kompendium der Speziellen Relativitätstheorie empfohlen werden, während Begelman an die Allgemeine Relativitätstheorie eher phänomenologisch herangeht und aus diesem Blickwinkel eine interessante Darstellung derselben offeriert. Dagegen eignen sich Misners und Schröders ausführliche mathematische Interpretationen der Gravitation erst für Studierende der Physik im Hauptstudium.

Nenad Balanesković
26. August 2006