Endstation: Weißer Zwerg

Kompakte Objekte

Kompakte Objekte:

- Objekte sehr hoher Dichte
- Kernreaktionen im Inneren sind zum Erliegen gekommen, Endstadien der Sternentwicklung
- Gravitationsdruck wird durch Entartungsdruck kompensiert (WD, Neutronensterne) oder komprimiert die Sternmaterie auf unendliche Dichte (Schwarze Löcher)

WD – Eigenschaften

Masse:	$0{,}08\, M_S - 1{,}4\, M_S$
mittlere Dichte:	$ca.\ 10^9 \frac{kg}{m^3}$
Radius:	$ca.\ 10^4\, km$
effektive Temperatur:	$5.000\, K - 200.000\, K$
Leuchtkraft:	$10^{-2}\, L_S - 10^{-3}\, L_S$

WD - Vorkommen

Die Anzahl Weißer Zwerge in unserer Galaxis wird auf $0{,}03/pc^3$ geschätzt. Dies entspricht einem Drittel der Dichte aller Hauptreihensterne.

=> Weiße Zwerge sind ein wesentlicher Bestandteil unserer Galaxis.

Weiße Zwerge kommen in allen Galaxien vor.

Sie sind das am häufigsten beobachtete Endstadium der Sternentwicklung.

Entwicklung Weißer Zwerge I

Der Aufbau Weißer Zwerge hängt von den Hauptreihensternen ab, aus denen sie gebildet worden sind. Insbesondere ist die Masse der ursprünglichen Objekte entscheidend.

$$0{,}08\, M_S < M < 0{,}25\, M_S$$

- Starke Konvektion => Durchmischung
- Ein Großteil des Wasserstoffs wird zu Helium verbrannt.
- Die Temperaturen sind zu gering, als dass der CNO-Zyklus eine wesentliche Rolle spielen könnte.

Entwicklung Weißer Zwerge II

$$0{,}25\, M_S < M < 2{,}5\, M_S$$

- Zentrum radiativ, Hülle konvektiv => Schichtbildung

- im Kern setzt Heliumbrennen ein => Kohlenstoff, Sauerstoff

- Helium-Flash durch steilen Temperaturanstieg im Zentralbereich ohne Expansion des Zentralvolumens verbunden mit starkem Ansteigen der Leuchtkraft

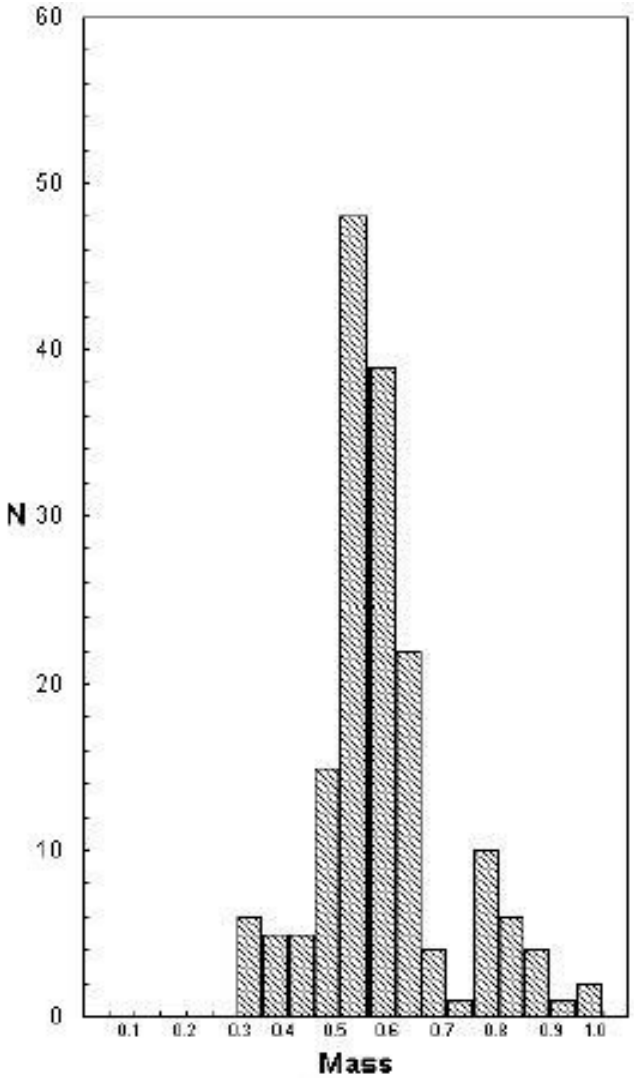
- Riesenstadium

- Kern kontrahiert, Schale expandiert => Teil der Hülle wird abgestoßen

$$M > 2{,}5\, M_S$$

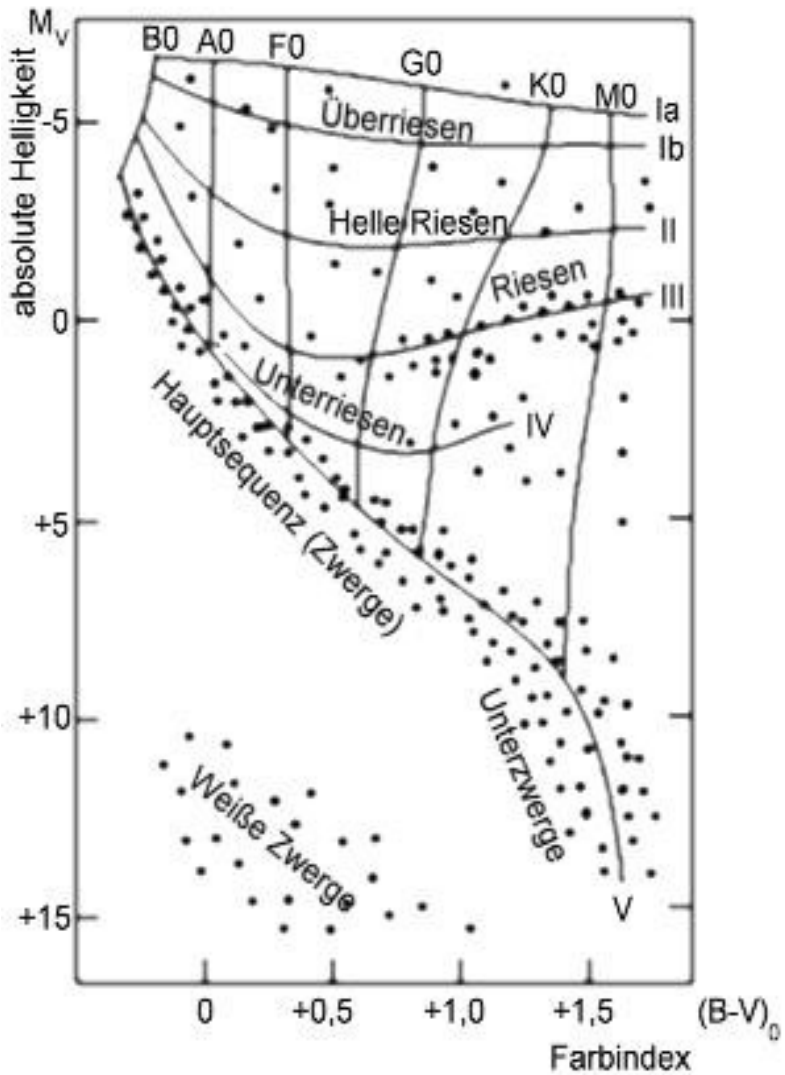
- Durch großen Massenverlust des Hauptreihensterns kann der Kern des Weißen Zwerges auch Eisen enthalten.

Massenverteilung



- starker Peak der Massenverteilung bei 0,55 M_S
- 80% im Bereich 0,42 – 0,70 M_S
- enger Massenbereich

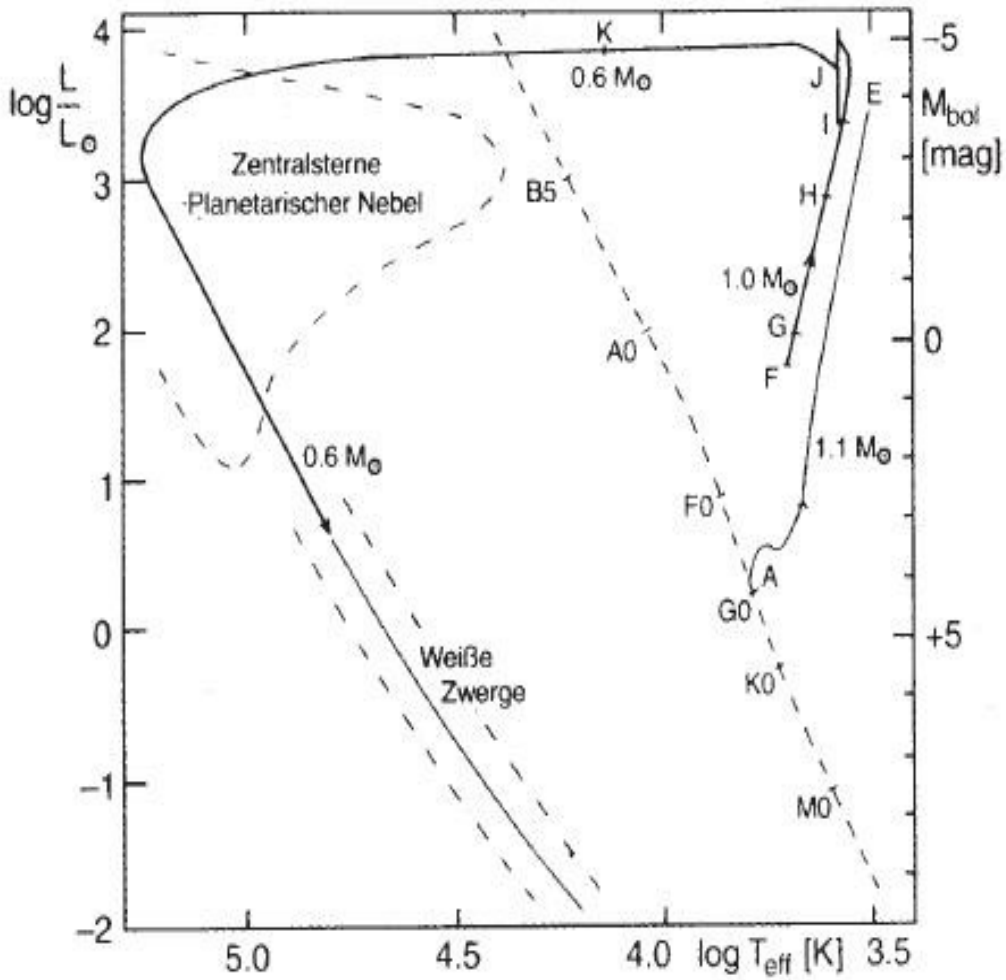
WD im HRD



Typisch sind hohe effektive Temperatur, geringe Leuchtkraft.

Weiße Zwerge durchlaufen während ihrer Entwicklung zu schwarzen Zwergen die Spektralklassen O bis M.

Weg im HRD (Sonne)



Weg eines Sterns mit $M = 1{,}1\, M_S$ im HRD:

- A Hauptreihe, H-Brennen
- Temperatur steigt bis E, He-Flash
- F neues Gleichgewicht
- H-, He-Brennen führen ins Riesenstadium

WD Spektren - Klassifikation

Die Spektren Weißer Zwerge zeugen vom vielfältigen Aufbau unterschiedlicher Vertreter.
Zur Unterscheidung wurde eine Klassifikation mit folgenden grundlegenden Eigenschaften eingeführt:

- Kennzeichnung der Objekte durch Abkürzungen wie DA 4.5

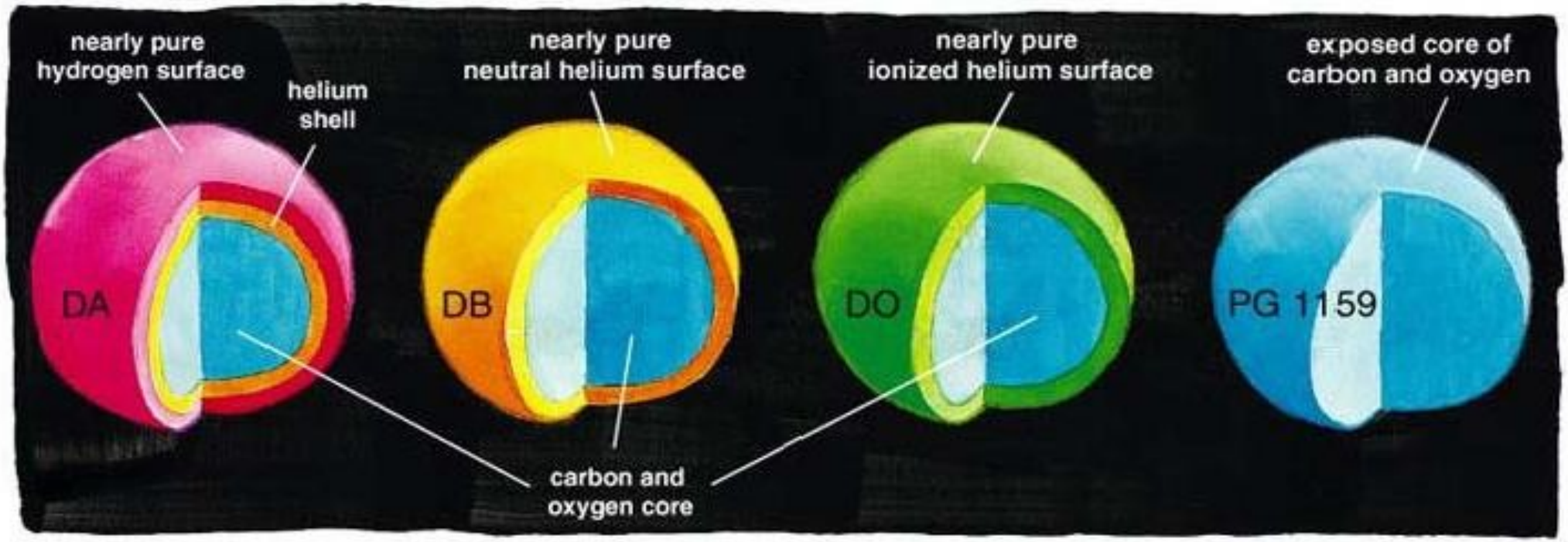
- D bezeichnet den Materiezustand „degenerate“.

- Der zweite Buchstabe ist von den führenden Spektrallinien im optischen Bereich abhängig.

- Die angefügte Ziffer ist ein Maß für die effektive Temperatur.

Effektive Temperatur und chemische Zusammensetzung der äußeren Schichten sind für diese Klassifikation wesentlich.

Aufbau Weißer Zwerge

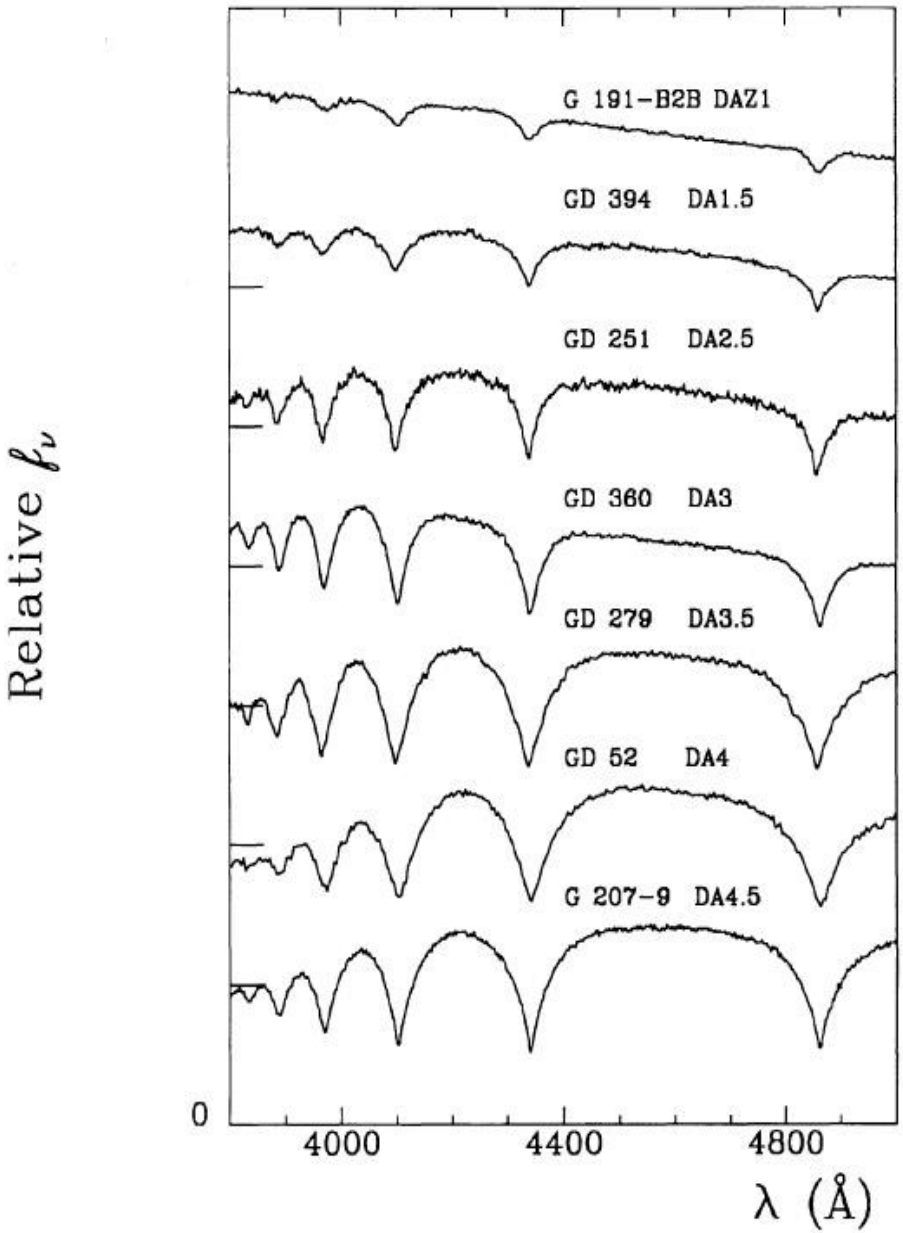


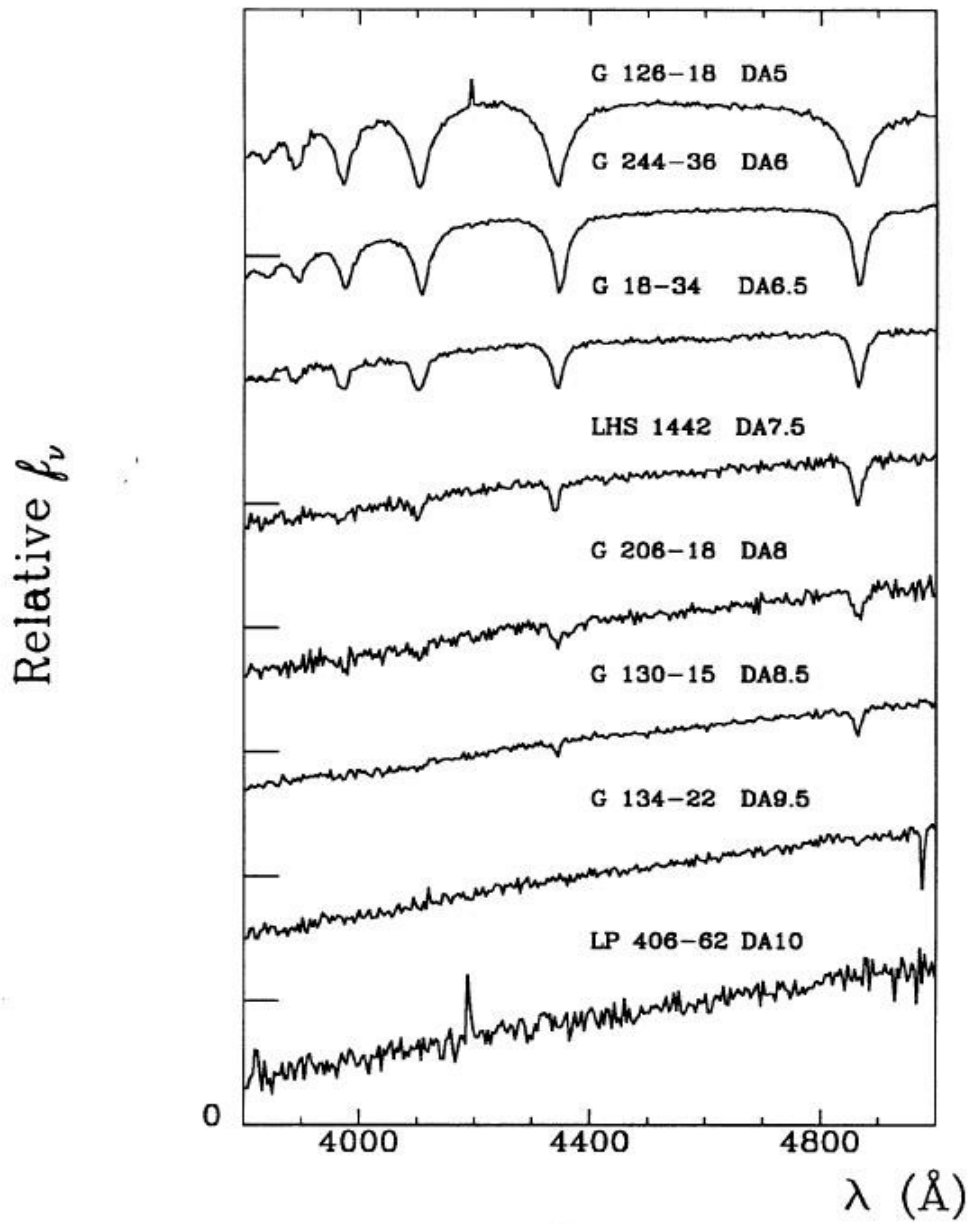
WD Spektren - Kategorien

Einige wichtige Kategorien dieser Klassifikation sind:

1. DA Sterne:
   - Hydrogen-Line WD
   - sind die am häufigsten beobachteten WD
   - T: 5.000 K – 80.000 K
   - verbreiterte Balmer-Linien wesentliches Merkmal
   - Breite der Balmer-Linien hängt insbesondere von der Temperatur ab.

Spektren der DA Sterne



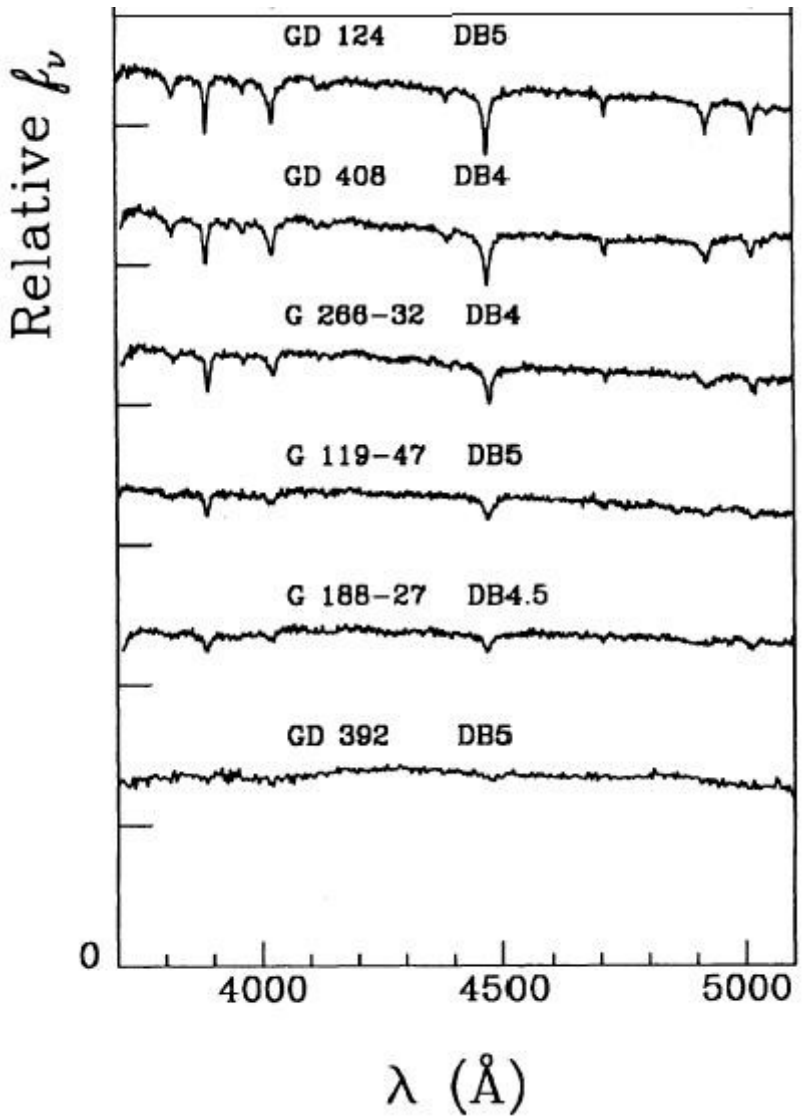


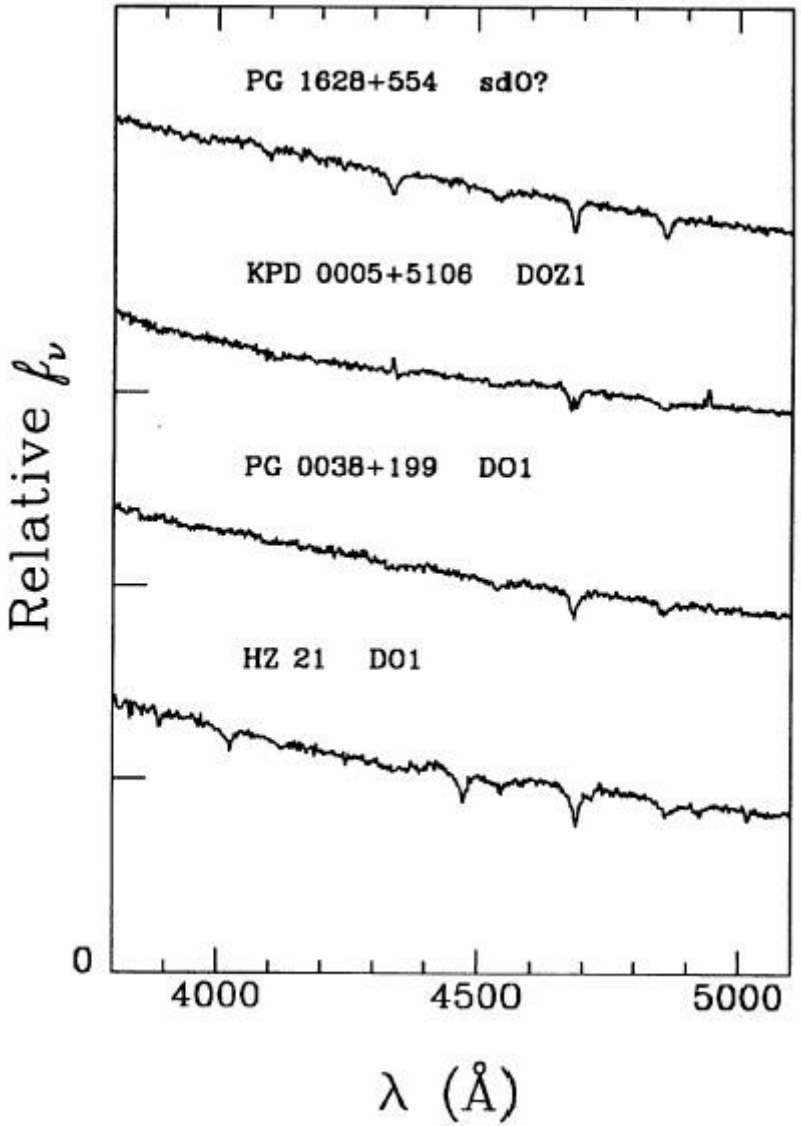
WD Spektren - Kategorien

DB Sterne:
- Cool Helium-Line WD
- Helium-Spektrallinien (neutrales Helium)

DO Sterne:
- Hot Helium-Line WD
- T: 45.000 K – 100.000 K
- Helium-Spektrallinien (ionisiertes Helium)

Spektren der DB/DO Sterne





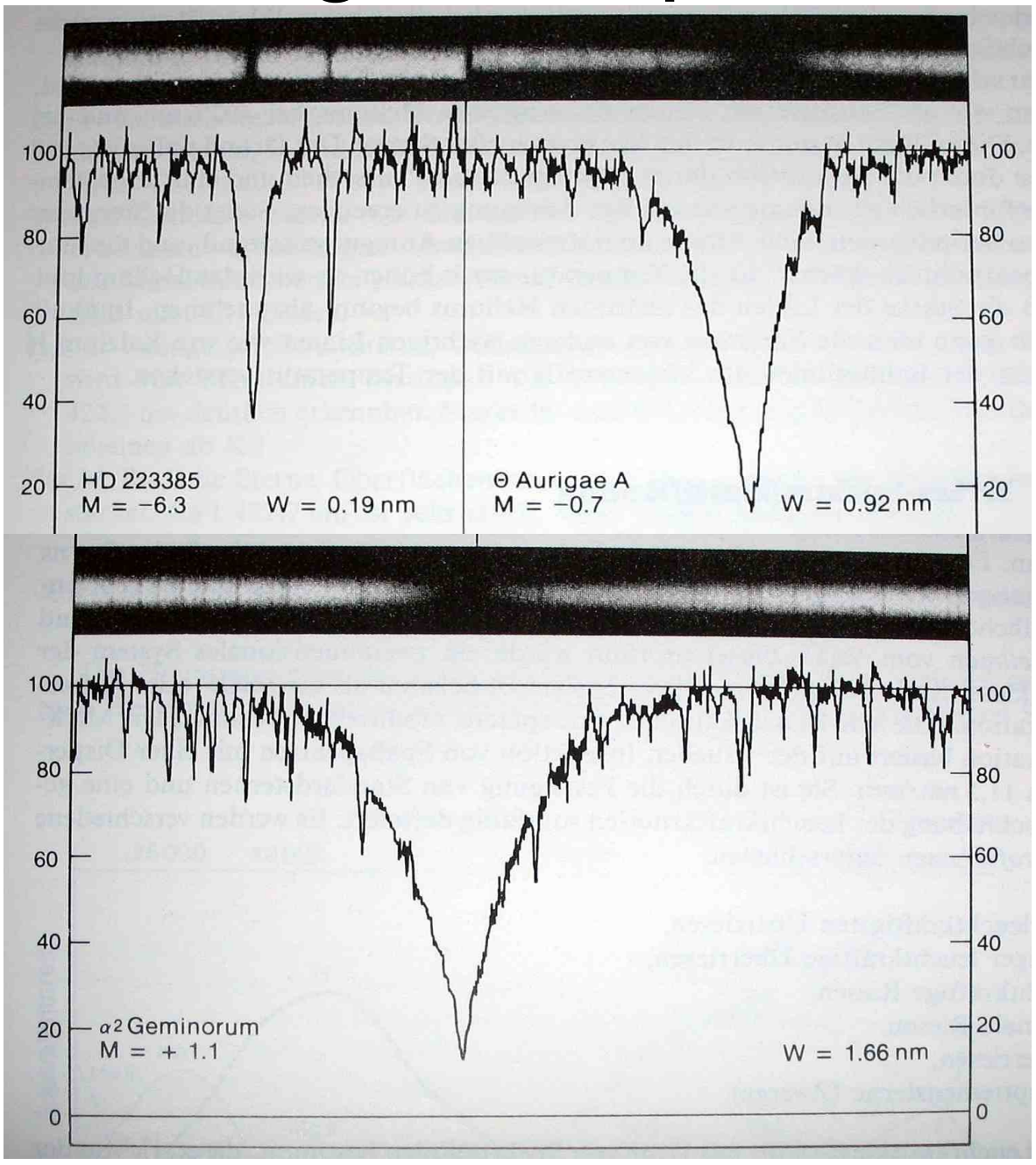
Spektren – allgemeine Charakteristika

- Verbreiterung der H-Spektrallinien durch den Stark-Effekt: Verschiebung der Energieniveaus des Wasserstoffs durch elektrische Felder von Metallionen

- WD, die einen großen Wasserstoffanteil besitzen, können eine Wasserstoffatmosphäre ausbilden, die zu einem blauen Leuchten der WD führt, während sie abkühlen.

- charakteristische relativistische Rotverschiebung

Aufweitung von Spektrallinien



Energietransport

Kern: - entartete Materie, zwei Phasen: Kerne, Elektronengas

- Elektron-Leitung gleicht Temperaturdifferenzen aus
  => isothermer Kern

Hülle: - Große Temperaturdifferenzen führen zu Konvektion.

Aus der Kernregion wird Energie zur Oberfläche transportiert und abgestrahlt.

Entwicklung Weißer Zwerge

Masse und Radien Weißer Zwerge sind konstant, sodass keine Gravitationsbindungsenergie durch Kontraktion frei werden kann.

Die Kernreaktionen sind zum Erliegen gekommen.

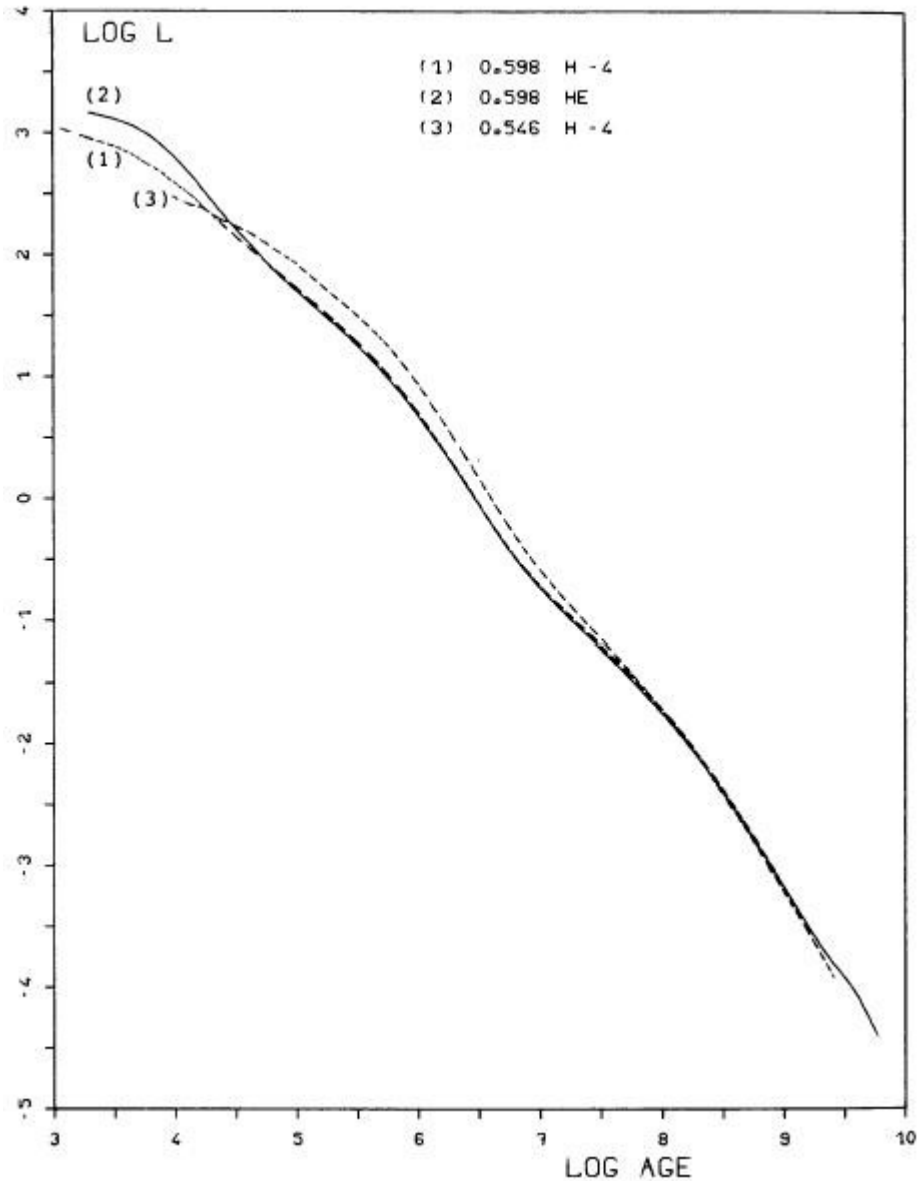
Die Leuchtkraft der WD wird durch thermische Energie gespeist.

Weiße Zwerge kühlen also -anders als Hauptreihensterne- ab.

Kühldauer (Alter): $$\tau \approx 1{,}7 \cdot 10^6 \left(\frac{M / M_S}{L / L_S} \right)^{5/7} [Jahre]$$

Für die meisten Weißen Zwerge beträgt die gesamte Kühldauer (Schwarzer Zwerg) mehrere Milliarden Jahre.

Leuchtkraft-Zeit-Diagramm



Zusätzliche Energiequellen und Senken für WD:

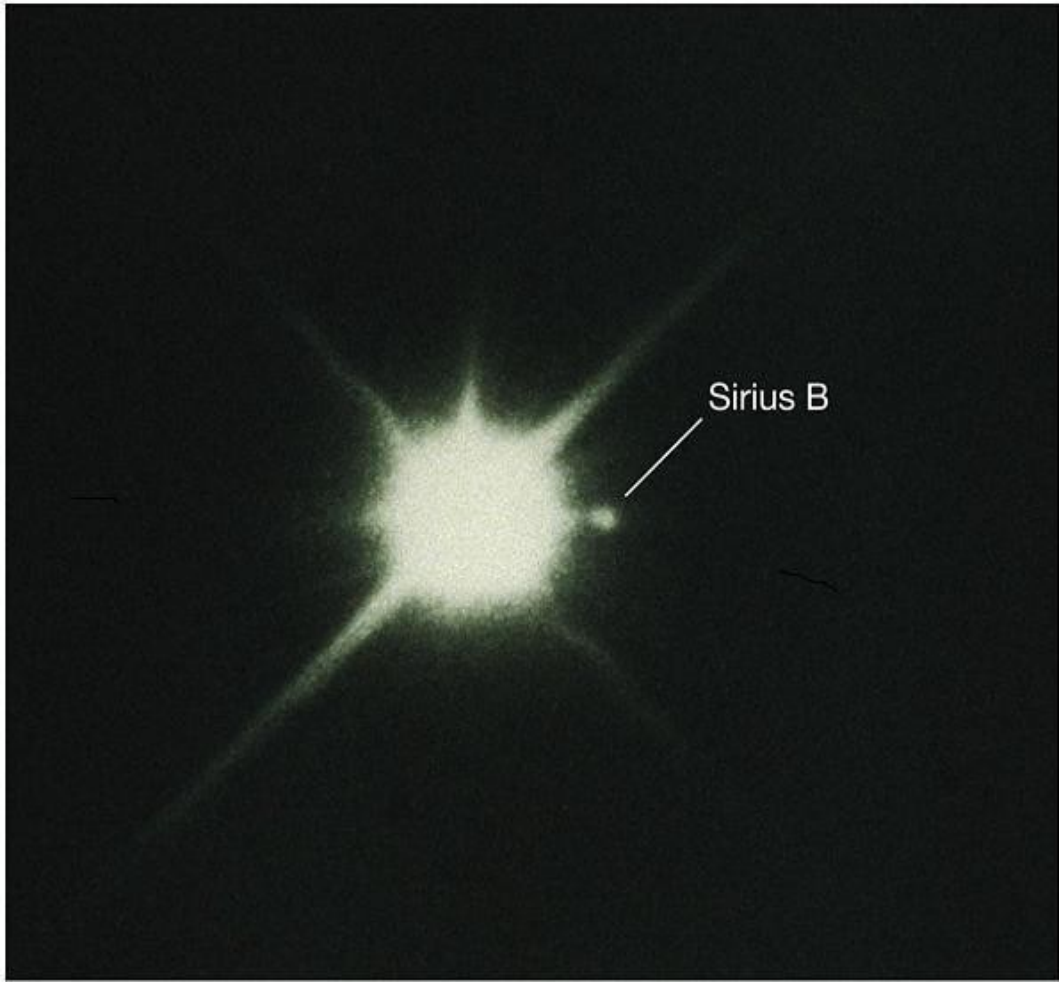
- Neutrinoverluste als dominierende Senke
- Latente Wärme wird bei der Kristallisation des Kernbereiches frei.

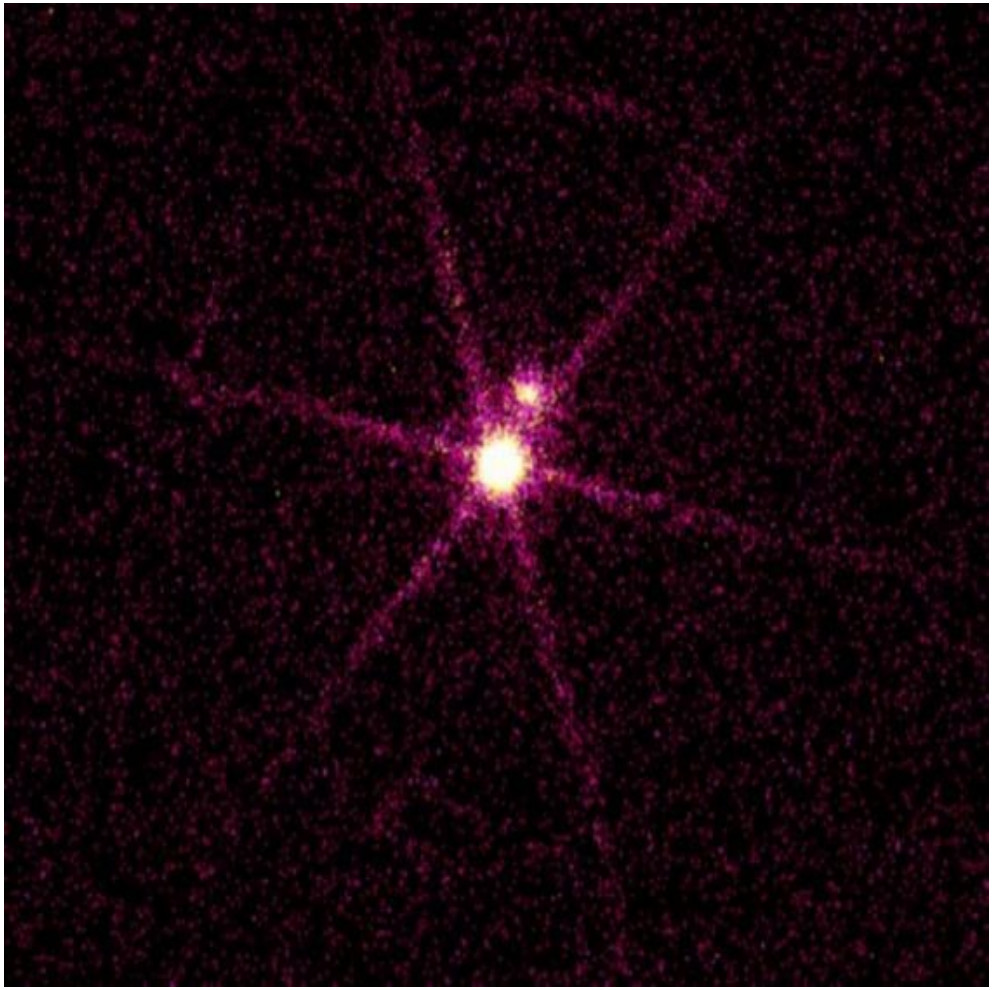
Sirius B

- „dunkler Begleiter“ von Sirius A in einem Doppelsternsystem
- 1834 postuliert (Bessel), 1862 entdeckt (Clark)
- Rotverschiebung von $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ eine wichtige experimentelle Stütze der allgemeinen Relativitätstheorie

Param.	A	B
L [$L_\odot$]	23.5	0.03
M [$M_\odot$]	2.3	1.0
T [K]	9910	27,000
R [$R_\odot$]	-	0.008
$\bar{\rho}$ [g/cm^3]	-	3×10^6
g [cm/s^2]	-	4.6×10^8

Doppelsternsystem Sirius A/B





Unschärferelation

Ort und Impuls eines Teilchens sind grundsätzlich nicht gleichzeitig genau bestimmbar.

Die Heisenbergsche Unschärferelation legt die Unsicherheiten auf eine bestimmte Größenordnung fest:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \hbar$$

Dieses Prinzip kann bei bekannter Einschränkung des Ortes genutzt werden, um den Impuls eines Teilchens zu bestimmen:

$$\Delta x = d \rightarrow p_x \approx \frac{\hbar}{d}$$

Ausschließungsprinzip

Volumenelement des sechsdimensionalen Ort-Impuls-Phasenraums:

$$\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta p_x \, \Delta p_y \, \Delta p_Z$$

Die Unschärferelation gibt das kleinste Volumenelement an:

$$\Delta V_{min} \approx \hbar^3$$

Das Pauli-Prinzip besagt, dass in einem Volumenelement dieser Größe maximal zwei Fermionen (z.B. Elektron, Proton, Neutron) unterschiedlichen Spins vorliegen können.

Zustandsgleichungen

Zustandsgleichungen beschreiben den Druck als Funktion von Dichte und Temperatur.
Sie werden in der Astronomie häufig als dimensionsloses Verhältnis von mittlerem Druck P zu mittlerer Ruheenergiedichte ϱc^2 angegeben:

$$\frac{P}{\varrho c^2} = f(\varrho, T)$$

Die so definierte Funktion charakterisiert die Sternmaterie.
Für nichtentartete Sternmaterie hoher Temperaturen ist die ideale Gasgleichung von zentraler Bedeutung:

$$f(\varrho, T) = f(T) = \frac{P}{\varrho c^2} = \frac{kT}{m_T c^2}$$

Im Folgenden soll die Zustandsgleichung für entartete Materie hergeleitet werden.

Entartete Materie

Fällt ein Stern in sich zusammen, so werden sehr hohe mittlere Dichten erreicht.

Ursache für den stabilisierenden Entartungsdruck ist nicht mehr die thermische Energie der Teilchen, sondern die durch das Pauli-Prinzip hervorgerufene kinetische Energie der Elektronen.

Elektronen liegen in entarteter Materie ähnlich wie in Metallen als Elektronengas vor.

Zwei Phasen: Elektronengas, Atomkerne

Die Zustandsgleichung ist eine Funktion der Dichte:

$$f(\varrho, T) = \frac{P}{\varrho c^2} = f(\varrho)$$

Fermi-Impuls

Entartetes Elektronengas: Alle verfügbaren Energieniveaus bis zu einem Grenzimpuls (Fermi-Impuls) sind besetzt.

Von den Elektronen im Impulsintervall [p, p+dp] eingenommenes Volumen im Phasenraum:

$$V_{Ph} = 4\pi\, p^2\, dp\, V$$

Anzahl dieser Elektronen:

$$dN = \frac{2 \cdot V_{Ph}}{V_{min}} = \frac{8\pi\, p^2\, dp\, V}{\hbar^3}$$

Gesamtzahl der Elektronen:

$$N = \int dN = \frac{8\pi\, V}{\hbar^3} \int_0^{p_F} p^2\, dp = \frac{8\pi\, V}{3\hbar^3}\, p_F^3$$

=> Fermi-Impuls:

$$p_F = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Fermi-Energie

Bezeichnet d den mittleren Abstand zwischen zwei Elektronen, so lässt sich der Fermi-Impuls aus der Unschärferelation abschätzen:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = d \rightarrow p_x^2 = p_y^2 = p_z^2 \approx \left(\frac{\hbar}{d}\right)^2 \rightarrow p_F^2 \approx 3\left(\frac{\hbar}{d}\right)^2$$

Für die (nichtrelativistische) Fermi-Energie folgt:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2 m_e} \approx \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m_e d^2}$$

Die Fermi-Energie nimmt zu, wenn das Elektronengas komprimiert wird. Sie ist die Ursache für den Entartungsdruck.

Gilt $E_F \gg kT$, so ist der Entartungsdruck wesentlich bedeutsamer als der thermische Druck.

Entartungsdruck - nichtrelativistisch

kinetische Energie eines Elektrons: $E_{kin}(p)=\frac{p^2}{2\,m_e}$

Gesamtenergie des Elektronengases:

$$E_{ges}=\int E_{kin}(p)\,dN=\frac{4\pi\,V}{m_e\hbar^3}\int_0^{p_F} p^4\,dp=\frac{4\pi\,V}{5\,m_e\hbar^3}\,p_F^5$$

=> $$E_{ges}=\frac{\pi}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{\hbar^2}{m_e}V\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}$$

Für den Druck eines Gases gilt im nichtrelativistischen Fall:

$$P=\frac{2}{3}\frac{E_{ges}}{V}$$

Damit folgt für den gesuchten Entartungsdruck des nichtrelativistischen Elektronengases:

$$P=\frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}$$

Entartungsdruck - relativistisch

extrem relativistische Näherung: $E_{kin}(p) = cp$

kinetische Gesamtenergie des Elektronengases:

$$E_{ges} = \int E_{kin}(p)\,dN = \frac{8\pi c V}{\hbar^3}\int_0^{p_F} p^3\,dp = \frac{2\pi c V}{\hbar^3} p_F^4$$

$$E_{ges} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \hbar c V \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

Druck eines relativistischen Gases: $P = \frac{1}{3}\frac{E_{ges}}{V}$

Daraus folgt der Entartungsdruck des relativistischen Elektronengases:

$$P = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \hbar c \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Zustandsfunktion entarteter Materie

Führt man die mittlere Kernmasse μm_p ein, so können die Zustandsfunktionen für beide Fälle in einer kompakten Näherung dargestellt werden:

$$\frac{P}{\varrho c^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e c^2 \cdot \mu m_p} \left(\frac{\varrho}{\mu m_p} \right)^{\frac{n}{3}}$$

n=2 nichtrelativistisch, n=1 relativistisch

Frage: Welche Größe beschreibt den Übergang vom nichtrelativistischen zum relativistischen Zustand?

Kritische Dichte

Kompression des Elektronengases führt zu Erhöhung der Fermi-Energie, somit auch des Fermi-Impulses und der Geschwindigkeit der Elektronen. Gilt $p_F \geqslant m_e c$,so wird das Elektronengas relativistisch.

Diese Größenordnung des Fermi-Impulses wird gemäß der Unschärferelation erreicht, wenn der mittlere Elektronenabstand auf die Comptonwellenlänge des Elektrons gesunken ist:

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} = 4 \cdot 10^{-13}\, m$$

$$p_F \cdot \lambda_C \geqslant \hbar \Leftrightarrow \frac{p_F \cdot \hbar}{m_e \cdot c} \geqslant \hbar \Leftrightarrow p_F \geqslant m_e \cdot c$$

Diesem Abstand entspricht die kritische Dichte :

$$\varrho_C = \frac{\mu \cdot m_p}{(\hbar / m_e c)^3} \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{kg}{m^3}$$

Zustandsfunktion entarteter Materie

Das naive Modell für die Zustandsgleichung entarteter Materie vereinfacht den Übergang vom nichtrelativistischen in den relativistischen Zustand folgendermaßen:

$$f(\varrho)=\frac{P}{\varrho c^2}\approx\frac{m_e}{\mu m_p}\left(\frac{\varrho}{\varrho_C}\right)^{\frac{n}{3}}$$

n=2 für $\varrho<\varrho_C$, n=1 für $\varrho\geqslant\varrho_C$

Diese Darstellung verdeutlicht, dass der Druck durch die Elektronen (m_e), die Ruheenergiedichte hingegen durch die Protonen (m_p) bewirkt wird.

Diese Abschätzung stimmt mit exakten Rechnungen im Dichtebereich $10^4\frac{kg}{m^3}<\varrho<10^{13}\frac{kg}{m^3}$ gut überein.

Weiße Zwerge - Gleichgewichtsbedingung

Im hydrostatischen Gleichgewicht gleicht der Entartungsdruck den mittleren Gravitationsdruck aus. Der thermische Druck kann vernachlässigt werden.

$$P_G = \frac{-3}{8} \frac{M^2 \cdot G}{\pi R^4}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{P}{\varrho c^2} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{R c^2} = \frac{m_e}{\mu m_p} \left(\frac{\varrho}{\varrho_C} \right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{P}{\varrho c^2} = \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{G}{c^2} M^{\frac{2}{3}} \varrho^{\frac{1}{3}} = \frac{m_e}{\mu m_p} \left(\frac{\varrho}{\varrho_C} \right)^{\frac{n}{3}}$$

Massen Weißer Zwerge - Chandrasekhar-Grenze

Für die Massen Weißer Zwerge ergibt sich:

$$M(\varrho)=\sqrt{6/\pi}\cdot\left(\frac{m_e c^2}{G\cdot\mu m_p}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\varrho}}{\varrho_C} \qquad \varrho<\varrho_C$$

$$M(\varrho)=\sqrt{6/\pi}\cdot\left(\frac{m_e c^2}{G\cdot\mu m_p}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\varrho_C}} \qquad \varrho\geqslant\varrho_C$$

Die Masse steigt mit zunehmender Dichte, bis die kritische Dichte erreicht ist. Mit $\varrho=\varrho_C$ erhält man die obere Grenze für die Masse Weißer Zwerge, die Chandrasekhar-Grenze:

$$M_C=M(\varrho_C)=\sqrt{6/\pi}\left(\frac{\hbar c}{G(\mu m_p)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\mu m_p$$

Das Plancksche Wirkungsquantum beeinflusst nicht nur den Aufbau der Atome, sondern auch die Massenskala und Struktur von Sternen.

Feinstrukturkonstante der Gravitation

Feinstrukturkonstante der Gravitation:

$$\alpha_G = \frac{G(\mu m_p)^2}{\hbar c} \approx 6 \cdot 10^{-39}$$

Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante (elektromagnetische WW):

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

Isolierte Betrachtung der Proton-Proton Wechselwirkung:

$$\frac{\alpha}{\alpha_G} \approx 10^{36}$$

Abschätzung der Chandrasekhar-Grenze für ein Wasserstoff-Heliumgemisch $\mu = 2{,}4$:

$$M_C \approx 1{,}4 \frac{\mu m_p}{\alpha_G^{3/2}} \approx 10^{30} kg$$

Literaturwert:

$$M_C = 1{,}4\, M_S = 2{,}8 \cdot 10^{30} kg$$

Radien Weißer Zwerge I

Mit dem kritischen Radius für den schwersten möglichen Weißen Zwerg gilt:

$$R=\left(\frac{3\mathrm{M}}{4\pi\varrho}\right)^{1/3}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{M_C}{\varrho_C}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{M}{M_C}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{\varrho_C}{\varrho}\right)^{1/3}=R_C\cdot\left(\frac{M}{M_C}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{\varrho_C}{\varrho}\right)^{1/3}$$

Für $\varrho<\varrho_C$ ergeben sich die Beziehungen:

$$M=M_C\cdot\sqrt{\varrho/\varrho_C}$$

$$R=\left(\frac{\varrho_C}{\varrho}\right)^{1/6}\cdot R_C$$

Und es folgt:

$$M\cdot R^3=M_C\cdot R_C^3$$

Radien Weißer Zwerge II

Als Ergebnis können wir für die Radien Weißer Zwerge festhalten:

$$R = \left(\frac{M_C}{M}\right)^{1/3} \cdot R_C = const \cdot M^{-1/3}$$

Die Radien Weißer Zwerge fallen mit zunehmender Masse.

$$R_C \approx 10^4\, km$$

Radien von einigen tausend Kilometern sind für Weiße Zwerge typisch.

Planeten und Weiße Zwerge

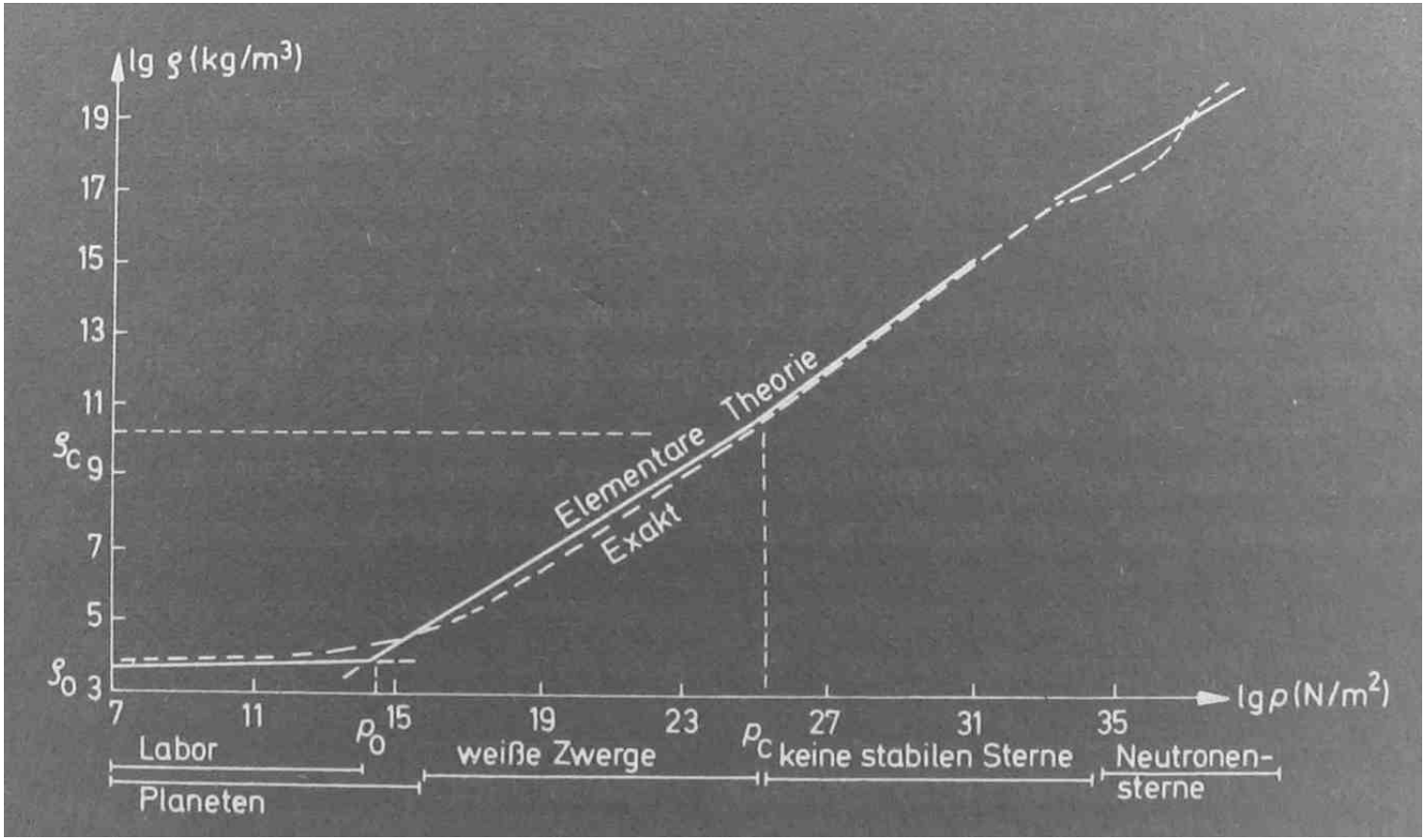
Gesucht: Eine untere Grenzmasse, die Weiße Zwerge von Planeten trennt.

Einfaches Modell für Materie geringer Dichte, deren atomarer Aufbau durch die elektromagnetische WW bestimmt ist (z.B. Atome, Menschen,Planeten):

$$\varrho_0 \approx \frac{m_p}{r_B^3}$$

Überschreitet der Druck einen Schwellenwert P_0 , so bricht die atomare Struktur zusammen und die Zustandsgleichungen für entartete Materie können angewandt werden.

Planeten und Weiße Zwerge



Masse-Radius-Beziehungen

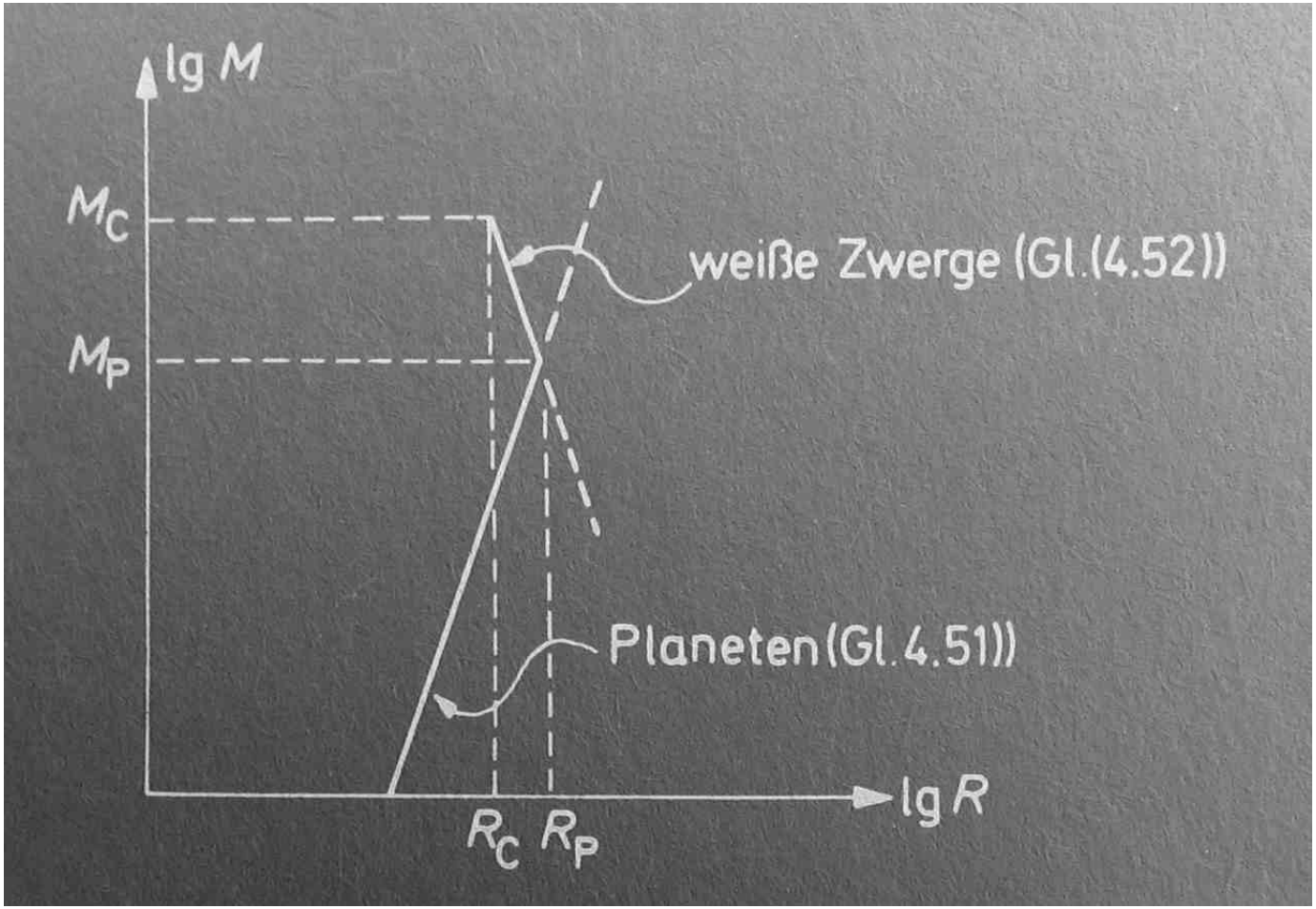
Planeten:

$$M \approx \varrho_0 R^3$$

Weiße Zwerge:

$$R \approx const \cdot M^{-1/3}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert die gesuchte untere Grenzmasse für Weiße Zwerge.



Untere Grenzmasse Weißer Zwerge

Zur Berechnung der unteren Grenzmasse M_p ist die Massenformel für Weiße Zwerge für $\varrho = \varrho_0$ auszuwerten:

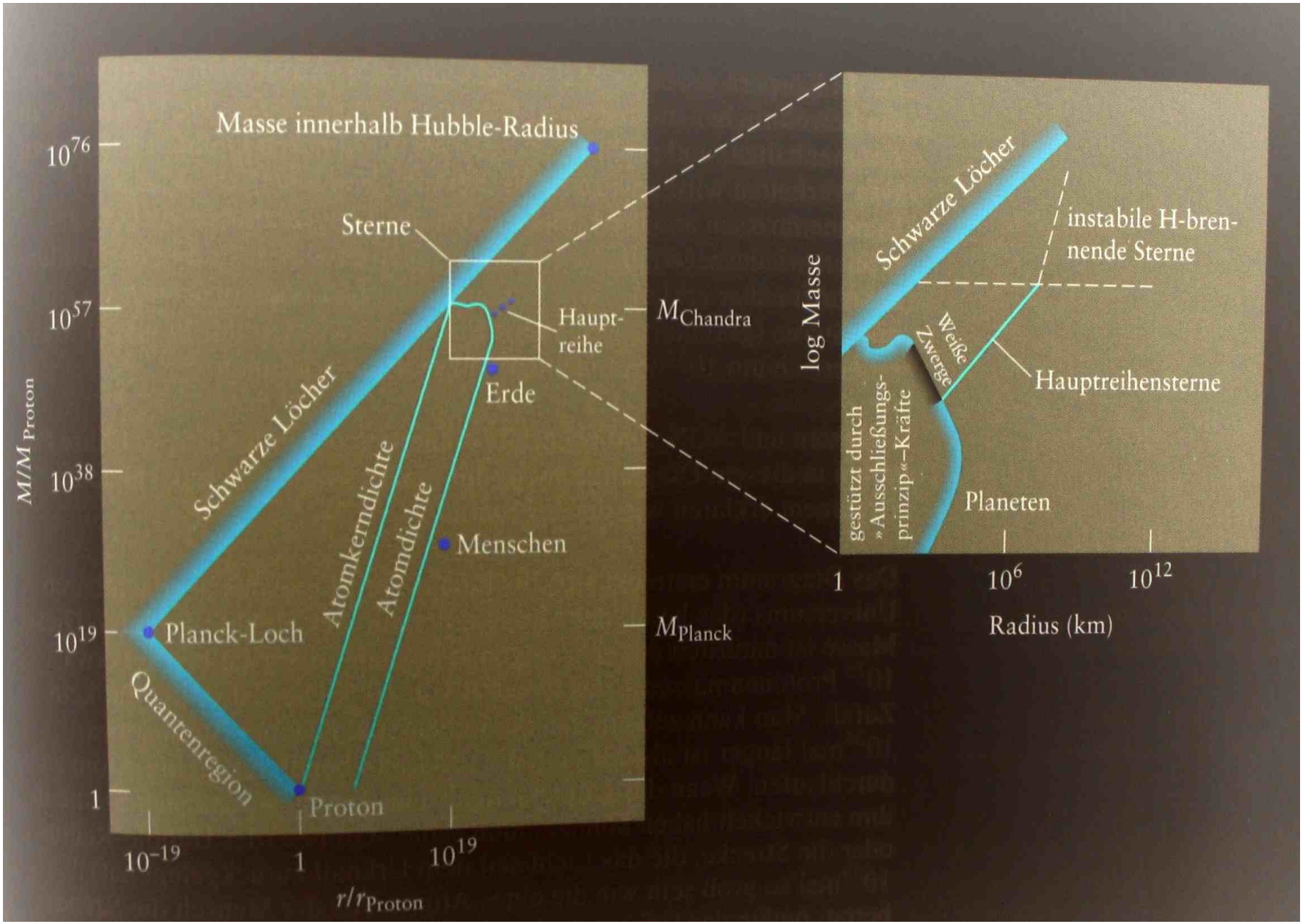
$$M_P = M_C \left(\frac{\varrho_0}{\varrho_C} \right)^{1/2} \approx 2 \cdot 10^{27}\, kg$$

Weiße Zwerge können also nur in einem engen Massenbereich existieren:

$$M_C \approx 3 \cdot 10^{30}\, kg > M > 2 \cdot 10^{27}\, kg \approx M_p$$

Der Massenbereich, der $\varrho \approx \varrho_0$ entspricht, ist hingegen enorm groß. Er liegt zwischen der Masse eines Protons und M_p .

Masse-Radius-Beziehungen



Relativistische Effekte

Relativistische Effekte sind für Weiße Zwerge von der Größenordnung:

$$\delta \approx \frac{\Delta \nu}{\nu} \approx \frac{R_{Sch}}{R} \approx \frac{P}{\varrho c^2} \approx f(\varrho) \approx \frac{m_e}{m_p}\left(\frac{\varrho}{\varrho_C}\right)^{2/3} \approx 10^{-4}$$

Die Stärke von Lichtablenkung und Rotverschiebung an Weißen Zwergen ist vor allem durch das Verhältnis von Elektronen- zu Protonenmasse bestimmt.
Elementarteilchenphysik, allgemeine Relativitätstheorie und Astrophysik greifen ineinander.

Bei der Energieabgabe von Sternen, die als Weiße Zwerge enden, überwiegt insgesamt die Bedeutung der Kernenergie die der Gravitationsenergie.

WD in Doppelsternsystemen / Novae

- Herkömmliche Novae entstehen in engen Doppelsternsystemen.
  Komponenten: Riesenstern, kompakter Stern (WD, Neutronenstern)

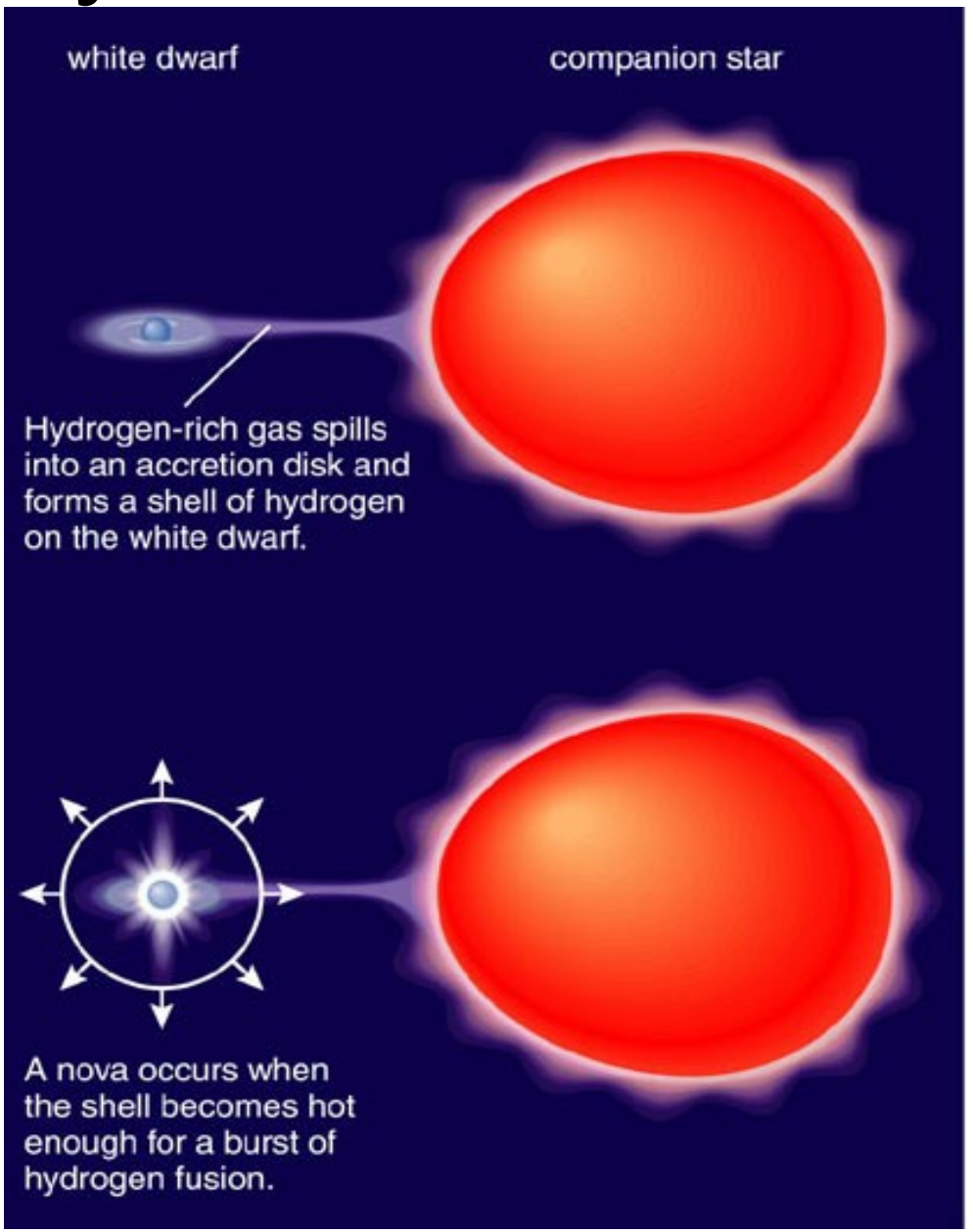
- Solche Doppelsternsysteme mit einem Weißen Zwerg werden auch als kataklysmische Veränderliche bezeichnet.

- Erreicht der Hauptreihenstern das Riesenstadium, so akkretiert der Weiße Zwerg Masse. Diese prallt auf die Oberfläche und erhöht deren Temperatur.

- Explosionsartige Wasserstofffusion stößt die Hülle des Weißen Zwerges ab.

- Weiße Zwerge können durch eine Supernova vom Typ I zerrissen werden.

Kataklysmische Veränderliche



SPACE
.C O M
Images Courtesy of Joe Tucciarone