

Theorie der Gravitationswellen

Christian Scholz

28. Januar 2008

- 1 Historisches
- 2 Theoretische Grundlagen
- 3 Die Feldgleichungen
- 4 Eigenschaften von Gravitationswellen
- 5 Ausblick

Historisches

- 1905 H. Poincaré : Gravitationswechselwirkung müsste sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten^[1]
- 1915 A. Einstein : Allgemeine Relativitätstheorie^[2]
- 1916 A. Einstein : Erste Vorhersage und mathematische Beschreibung von Gravitationswellen^[3]
- 1918 A. Einstein : Über Gravitationswellen^[4]

Historisches

- 1936 A. Einstein & N. Rosen verrechnen sich und verwerfen die Idee von Gravitationswellen^[5]
- 1937 Kurz vor der Veröffentlichung korrigiert Einstein den Fehler^[6]
- ...
- 1960 J. Weber : Vorschlag zur Detektion von Gravitationswellen^{[7][8]}
- 1975 R.A. Hulse & J.H. Taylor : PSR1913+16 Indirekter Nachweis von Gravitationswellen^[9]

Wieso könnte es Gravitationswellen geben?

SRT: die zeitliche Reihenfolge hängt vom Bezugssystem ab

Konsequenz

Keine instantane Wechselwirkungen

Gravitation und Relativität

Wie kann man eine relativistische Theorie mit Gravitationskraft aufstellen?

- **Einsteins Äquivalenzprinzip** : Freier Fall und Schwerelosigkeit sind lokal ununterscheidbar
- **Kovarianz** : Gleichungen sind forminvariant unter Koordinatentransformation

⇒ Gravitation ist äquivalent zur Krümmung des Raumes

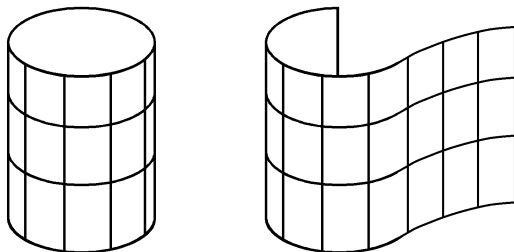
Nichtgekrümmter Raum - Minkowskiraum

Räume ohne Krümmung

z.B. Euklidischer \mathbb{R}^n , Minkowskiraum, ...

Vorsicht

Ein Kreiszyylinder besitzt keine innere Krümmung



Das Wegelement

Relativistisches Wegelement

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem fordert

$$\eta_{\mu\nu}$$

Lokal gekrümmter Raum

Betrachte Wegelement auf Kugeloberfläche: $\theta = \xi^1$, $\phi = \xi^2$

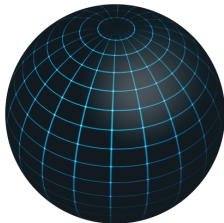
$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j$$

Hieraus kann man den metrischen Tensor ablesen

$$(g_{ij}) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Lokal gekrümmter Raum

Ausdruck für ds^2 auf Kugeloberfläche kann man **nicht** in kartesische Koordinaten transformieren!



- Der Raum ist genau dann nicht gekrümmt, wenn kartesische Koordinaten möglich sind.

Krümmungstensor

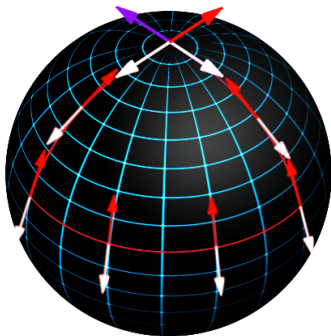
Gibt es ein “Objekt”, das die Krümmung eines Raumes in beliebiger Dimension quantitativ beschreibt?

⇒ Krümmungstensor

$$R^m_{ijk}$$

Krümmungstensor

Wie kann man die innere Krümmung einer Kugel "messen"?



$$\oint \delta A^i = -\frac{1}{2} R_{ijk}^m A_m df^{jk}$$

Änderung des Vektors
bei Parallelverschiebung
entlang geschlossener
Kurve

Krümmungstensor

$$R_{ijk}^m = f((\partial g)^2, \partial^2 g)$$

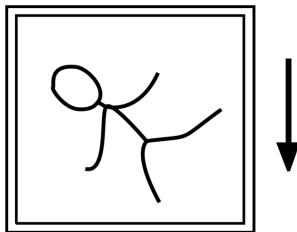
- Lässt sich durch die **erste** und **zweite Ableitung** von $g_{\mu\nu}$ bilden
- **quadratisch** in der **ersten Ableitung**
- **linear** in der **zweiten Ableitung**
- Wird benötigt um die Feldgleichungen aufzustellen

Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld

Wie sehen die relativistischen Bewegungsgleichungen aus?

- Äquivalenzprinzip : In frei fallendem Koordinatensystem α^μ gelten die Gesetze der SRT (kräftefrei)

$$\frac{d^2 \alpha^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad , \quad \tau = \text{Eigenzeit}$$



Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld

- Koordinatentransformation $\alpha^\mu \rightarrow \beta^\mu$

Relativistische Bewegungsgleichung mit Gravitation^[10]

$$\frac{d^2 \beta^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{d\beta^\mu}{d\tau} \frac{d\beta^\nu}{d\tau}$$

Christoffelsymbole: $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = f(\partial g..)$

$g_{\mu\nu} \equiv$ relativistische Gravitationspotentiale

Von der Statik zur Dynamik

Wie sehen die Feldgleichungen aus?

Newtonscher Grenzfall

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho(r)$$

Eine relativistische Feldgleichung muss kovariant sein

$\Phi(r)$	\rightarrow	$g_{\mu\nu}$	metrischer Tensor
$\rho(r)$	\rightarrow	$T_{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Tensor

Die Feldgleichungen

Wir suchen den Zusammenhang zwischen den $g_{\mu\nu}$ und den $T_{\mu\nu}$

“Konstruiere” Theorie

- Newtonscher Grenzfall
- Analogie zur Elektrodynamik
- Selbstwechselwirkung

Form der Feldgleichungen

Allgemeinste Form

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$$

Die linke Seite muss folgende Eigenschaften haben

- **Linear** in **zweiter Ableitung** von $g_{\mu\nu}$
(Newton+Elektrodynamik)
- **Quadratisch** in **erster Ableitung**
(Selbstwechselwirkung+Elektrodynamik : $\epsilon \propto E^2 + B^2$)
- Gleichung muss **kovariant** sein

Diese Forderungen werden gerade vom Krümmungstensor erfüllt!

Die Feldgleichungen

Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$

- Kontraktion des Krümmungstensors: $R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$
- Erfüllt die Voraussetzungen

Krümmungsskalar R

- Kontraktion des Ricci-Tensors: R_{μ}^{μ}
- Erfüllt die Voraussetzungen

Die Feldgleichungen

Man findet die Feldgleichungen

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

bzw.

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad T = T^\mu{}_\mu$$

Zwischenbilanz

Was haben wir bis jetzt?

- klassischer Grenzfall + Analogie zur Elektrodynamik + Kovarianz \Rightarrow Feldgleichungen
- nichtlinear
- System aus 10 gekoppelten partiellen Differentialgleichungen

Herleitung der Wellengleichung

Bei kleinen Auslenkungen fallen Terme höherer Ordnung weg

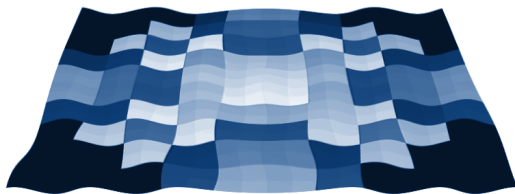
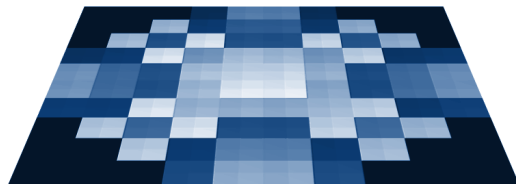
Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

wobei

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Herleitung der Wellengleichung



Herleitung der Wellengleichung

- Vernachlässige Terme höherer Ordnung
- Nutze Eichinvarianz

Linearisierte Feldgleichung^[10] [3]

$$G_{\mu\nu} \rightarrow \square h_{\mu\nu}$$

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Analogie zur Elektrodynamik

Qualitative Herleitung

Statik

$$\Delta\Phi_{\text{el}} = 4\pi\rho_{\text{el}}(r) \iff \Delta\Phi_{\text{grav}} = 4\pi G\rho_{\text{mass}}(r)$$

Dynamik

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu \iff \square g_{\mu\nu} \sim T_{\mu\nu}$$

Linearisierte Feldgleichungen im Vakuum

Im Vakuum fallen die Quellterme mit $T_{\mu\nu}$ und T weg

Die Feldgleichungen werden dann zu

$$\square h_{\mu\nu} = 0$$

Homogene Wellengleichung!

Lösung der Wellengleichung^[10]

Allgemeiner Ansatz

$$h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c.$$

Für die weitere Betrachtung

- Eichinvarianz
 - zusätzliche Eichbedingung für Wellenlösungen
- Betrachte Welle in z Richtung

Lösung der Wellengleichung

Für eine ebene Welle im Vakuum erhält man

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h'_{11} & h'_{12} & 0 \\ 0 & h'_{12} & -h'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp [ik(z - ct)] + c.c.$$

Es bleiben nur zwei unabhängige Komponenten in der Amplitude.

Polarisation

- linear polarisierte Wellen
 - zwei Möglichkeiten

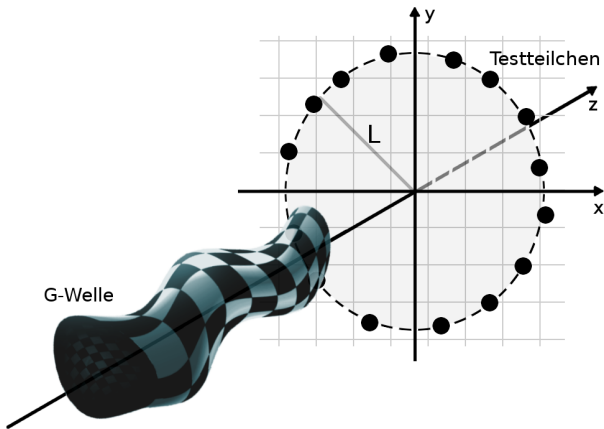
$$h'_{11} = h, h'_{12} = 0 \quad \text{oder} \quad h'_{11} = 0, h'_{12} = h$$

- elliptisch polarisierte Welle

$$h'_{11} = h_1, h'_{12} = \pm ih_2$$

Wie kann man sich diese Wellen vorstellen?

Auslenkung leichter Teilchen



Wie bewegen sich Teilchen im Feld der Welle?

Problem : Die Bewegungsgleichungen sind von der Wahl der Koordinaten abhängig

Es gibt Koordinaten in den scheinen die Teilchen zu ruhen.

Lösung

Betrachte die Änderung der Abstände durch den metrischen Tensor.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

Auslenkung leichter Teilchen

zeitlich-räumliche Änderung der Metrik

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\
 &= \eta_{\mu\nu} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h'_{11} & h'_{12} & 0 \\ 0 & h'_{12} & -h'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(z - ct)] + c.c.
 \end{aligned}$$

und

$$ds^2 = \underbrace{c^2 dt^2}_{\text{"konstant"}} - \underbrace{dl^2}_{\text{Auslenkung}} - \underbrace{dz^2}_{\text{"konstant"}}$$

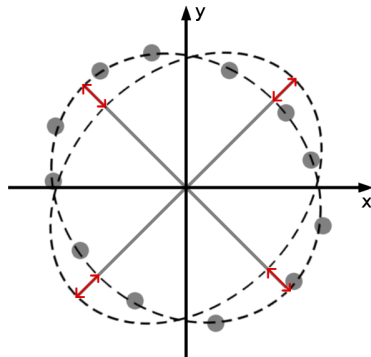
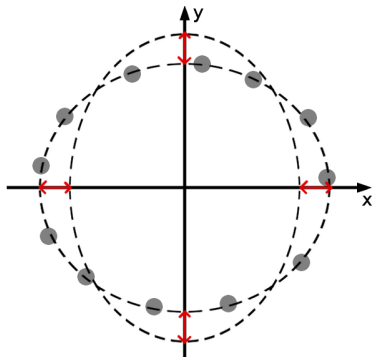
Auslenkung leichter Teilchen

Man erhält für linear polarisierte Wellen^[10]

$$L'^2 = L^2 \cdot \begin{cases} 1 - 2h \cos(2\phi) \cos(\omega t) & \text{für } h'_{11} = h, h'_{12} = 0 \\ 1 - 2h \sin(2\phi) \cos(\omega t) & \text{für } h'_{11} = 0, h'_{12} = h \end{cases}$$

Auslenkung leichter Teilchen

Für kleine h erhält man Ellipsen



Auslenkung leichter Teilchen

Nutze diesen Effekt zur Detektion!

Konzept

Interferometer zur Messung kleiner Auslenkungen

⇒ Direkte Messung von Gravitationswellen^[8]

Energie und Impuls der Welle

Betrachte Feldgleichungen in zweiter Ordnung

Qualitativ

Energie-Impuls-Tensor des Feldes ist proportional zur ersten Ableitungen des metrischen Tensors

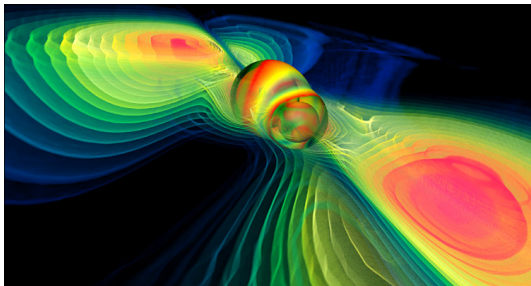
$$t_{\mu\nu}^{\text{grav}} \propto \frac{\partial h_{\dots}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial h_{\dots}}{x^{\nu}} \propto k_{\mu} k_{\nu} h^2$$

Energie und Impuls der Welle

Exakte Rechnung liefert^[10]

$$t_{\mu\nu}^{\text{grav}} = \frac{c^4}{8\pi G} k_\mu k_\nu (|h'_{11}|^2 + |h'_{12}|^2)$$

Quellen von Gravitationsstrahlung



Verschmelzende Schwarze Löcher (Quelle : MPI for Gravitational Physics/Zuse Institut Berlin/Center for Computation & Technology at Louisiana State University/W.Benger)

- Quadrupolstrahlung
- Beispiel: Rotator

Quadrupolstrahlung

- Dipolmoment verschwindet im CM-System
- In 1. Ordnung Quadrupolstrahlung
- Dimension: Analog zu Elektrodynamik

Abgestrahlte Leistung

$$P_Q \propto \omega^6 Q^2$$

Exakte Lösung

Betrachte Wellengleichung mit Quelltermen

$$\square h_{\mu\nu} \propto \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

und oszillierende Massenverteilung

$$T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.c.$$

Exakte Lösung

Lösung der Wellengleichung

- Greensfunktion
- Asymptotik
- Kontinuitätsgleichung
- Langwellennäherung

Exakte Lösung

Abgestrahlte Leistung^[4]

$$P_{\text{grav}} = \frac{2G\omega^6}{5c^5} \left(\sum_{i,j=1}^3 |Q_{ij}|^2 - \frac{1}{3} \left| \sum_{i=1}^3 Q_{ii} \right|^2 \right)$$

Mit dem Quadrupolmoment

$$Q_{ij} = \int d^3r x_i x_j \rho$$

Wobei ρ der räumliche Anteil einer oszillierenden Massenverteilung ist

Rotierende Starre Körper

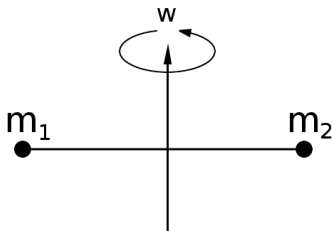
Starrer Körper rotiert um z-Achse

$$(Q_{ij}) = \frac{I_1 - I_2}{4} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_1, I_2 : \text{Hauptträgheitsmomente}$$

Abgestrahlte Leistung

$$P_{\text{grav}} \propto \omega^6 (I_1 - I_2)^2$$

Vereinfachtes Modell für Doppelsternsystem



Trägheitsmoment

$$I_1 = \frac{M_1 M_2 r^2}{M_1 + M_2} \quad I_2 = 0$$

Vereinfachtes Modell für Doppelsternsysteme

klassische Rechnung:

Bahnfrequenz

$$\omega^2 = G \frac{M_1 + M_2}{r^3}$$

Damit:

Abgestrahlte Leistung

$$P_{\text{grav}} \propto \frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{r^5}$$

Konsequenz des Energieverlustes

- Verringerung des Abstandes
- Verringerung der Bahnperiode

Indirekter Nachweis^[9]

Messung der Bahnperiode von Doppelsternsystemen
z.B. PSR 1913+16

Ausblick

- Gravitationswellen relativistischer Quellen
- Gravitations-Hintergrundstrahlung
- Nichtlineare Effekte(Solitonen)
- Quantisierung der Theorie(Gravitonen)

Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!

Quellenverzeichnis

- 1 H. Poincaré : Sur le dynamique d'electron, Comptes rendus de l'Académie des sciences. 140, 1905b, S. 1504-1508, [\[Link\]](#)
- 2 A. Einstein: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: Annalen der Physik. 49, 1916, S. 769-822, [\[Link\]](#)
- 3 A. Einstein : Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (22.6.1916) pp.688, [\[Link\]](#)
- 4 A. Einstein: Über Gravitationswellen 1918, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (31.1.1918) pp.154, [\[Link\]](#)
- 5 Einstein versus the Physical Review, Daniel Kennefick, Sept. 2005, p.43 [\[Link\]](#)
- 6 A. Einstein & N. Eosen : On Gravitational Waves, Journal of the Franklin Institute (1937) , Vol. 223, p.43, [\[Link\]](#)
- 7 J.Weber & J.A. Wheeler : Reality of the Cylindrical Gravitational Waves of Einstein and Rosen, Rev. Mod. Phys. 29, 509 - 515 (1957), [Issue 3 – July 1957], [\[Link\]](#)
- 8 J.Weber : Detection and Generation of Gravitational Waves, Phys. Rev. 117, 306 - 313 (1960), [Issue 1 – January 1960], [\[Link\]](#)
- 9 R.A. Hulse & J.H. Taylor : Discovery of a Pulsar in a Binary System, The Astrophysical Journal, 195:L51-53, (15.01.1975) [\[Link\]](#)
- 10 T. Fließbach : Allgemeine Relativitätstheorie, 5.Auflage, Elsevier (2006)