

Schwarze Löcher

Eine Einführung

Felix Fleischmann

Erlangen Center for Astroparticle Physics

16. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

- 1 Historisches
- 2 Crashkurs ART
 - ART als klassische Feldtheorie
 - Lösung der Einstein-Gleichungen: Schwarzschildmetrik
 - Penrosediagramme
- 3 Schwarze Löcher
 - Klassische Betrachtung
 - Thermodynamik und QM
 - Thermodynamik
 - Quantenmechanik
- 4 Nachweis schwarzer Löcher
- 5 Offene Fragen

Schwarze Löcher vor Einstein

1796 beschreibt Pierre Simon Laplace einen Körper, von dem Licht nicht mehr entweichen kann (*Corps obscura*). Nach Newtons Gesetzen gilt für die Fluchtgeschwindigkeit:

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

Daraus folgt für Licht ($v = c = 1$)

Radius-Masse-Beziehung

$$r = 2GM$$

Motivation der ART

Allgemeines Relativitätsprinzip

„Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten.“

Äquivalenzprinzip

Kein lokales Experiment kann feststellen, ob ein freier Fall im Gravitationsfeld vorliegt oder ob gar kein Gravitationsfeld vorliegt.

Mathematische Formulierung der ART

Äquivalenzprinzip legt nahe Gravitation als *geometrische Eigenschaft* des Raumes aufzufassen.

- „Sprache“ der ART: Differentialgeometrie
- Spielwiese der ART: *Mannigfaltigkeiten*.
- Zur Bestimmung von Längen und Winkeln unabdingbar:
Metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$
- Abbildungen auf und zwischen Mannigfaltigkeiten: *Tensoren*
und *Diffeomorphismen*

ART als klassische Feldtheorie

Wie macht man daraus eine klassische Feldtheorie?

Grobe Faustregel

Nimm Gleichungen der SRT und ersetze $\eta_{\mu\nu}$ durch $g_{\mu\nu}$ sowie partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen.

Fundamentaler: Bestimme nach dem *Prinzip der kleinsten Wirkung* Feldgleichungen.

Anforderungen an die Wirkung:

- Koordinatensystemunabhängigkeit (Relativitätsprinzip)
- Erste Ordnung in den Ableitungen der Felder

ART als klassische Feldtheorie

Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|\det g|} (R - 2\Lambda)$$

$\kappa = 8\pi G$: Einstein-Konstante

Λ : Kosmologische Konstante

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$: Ricci-Skalar

$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$: Ricci-Tensor

$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda\nu}$: Riemann-Tensor

$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu})$: Christoffel-Symbol

ART als klassische Feldtheorie

Variation bezüglich der Metrik führt auf die

Einstein-Gleichungen im Vakuum

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Einstein-Tensor: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$

Problem

Lösung im Allgemeinen schwierig, aber für spezielle Fälle analytisch möglich.

Schwarzschildlösung

Betrachte **sphärisch symmetrische** Vakuum-Raumzeit

$\Rightarrow g$ muss rotationsinvariant sein.

Das führt zur

Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}dr^2 + r^2d\Omega_2$$

Schwarzschildlösung

Bemerkungen:

- 1 Exakte Vakuum-Lösung, die außerhalb jeder sphärisch symmetrischen Materie-Verteilung gilt, selbst wenn diese nicht statisch ist
- 2 Sphärische Symmetrie und Einstein Gleichungen \Rightarrow statische Lösung (*Birkhoff Theorem*)
- 3 Lösung nur vom Parameter R_s abhängig

Im Limes kleiner Gravitationsfelder (Newton-Limes) erhält man

Schwarzschildradius

$$R_s = 2GM \approx 3 \left(\frac{M}{M_{sun}} \right) \text{ km}$$

G : Gravitationskonstante M : Masse der Materieverteilung

Schwarzschildlösung

Achtung!

Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}dr^2 + r^2d\Omega_2$$

ist an den Punkten $r = 0$ und $r = R_s$ singulär!

Weitere Analyse offenbart die Wahl eines schlechten Koordinatensystems: $r = R_s$ ist reine Koordinatensingularität! In geeigneten Koordinaten ist und bleibt nur $r = 0$ singulär.

Penrosediagramme

Kompakte Darstellung der kausalen Struktur einer unendlich ausgedehnten Raumzeit

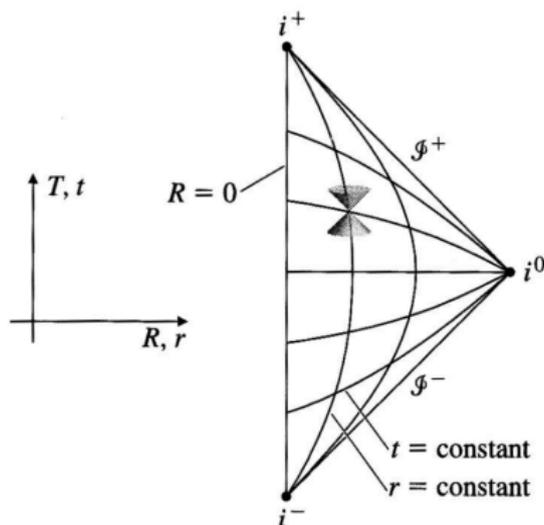


Abbildung: Penrosediagramm der Minkowski-Raum-Zeit [1]

Penrosediagramm der Schwarzschildmetrik

Vier Bereiche erkennbar:

- 1 „Normale“ Minkowski-Raumzeit
- 2 Schwarzes Loch
- 3 Minkowski-Parallelwelt
- 4 Weißes Loch

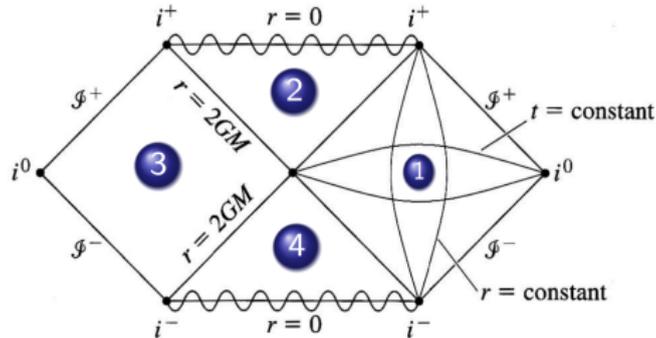


Abbildung: Penrosediagramm der Schwarzschildmetrik [1]

Schwarzes Loch

Schwarzes Loch

Ein schwarzes Loch ist ein Objekt, das von zukunftsgerichteten, zeitartigen Weltlinien nicht verlassen werden kann.

Ereignishorizont

Ein Ereignishorizont ist eine Fläche in der Raumzeit, die die Punkte, die durch zeitartige Wege mit dem Unendlichen verbunden sind, von denen trennt, die es nicht sind.

Weitere Typen schwarzer Löcher

Metrik	Ladung	Drehimpuls
Schwarzschild	$= 0$	$= 0$
Reissner-Nordström	$\neq 0$	$= 0$
Kerr	$= 0$	$\neq 0$
Kerr-Newman	$\neq 0$	$\neq 0$

Keine-Haare-Theorem

Schwarze Löcher sind vollständig durch die Parameter Masse, Ladung und Drehimpuls gekennzeichnet.

Bildung schwarzer Löcher

Entwicklung eines Sternes:

- Anfang: Gleichgewicht zwischen Strahlungsdruck und Gravitation
- Ende: Strahlungsdruck nimmt ab \rightarrow Gravitation überwiegt.

\Rightarrow **Drei Szenarien:**

Weißer Zwerg	Neutronenstern	Schwarzes Loch
$M_{krit} \leq 1,5 \cdot M_{Sonne}$	$M_{krit} \leq 3 \cdot M_{Sonne}$	$M_{krit} \geq 3 \cdot M_{Sonne}$

Schwarzes Loch

Was sieht jemand, der einen Reisenden zum schwarzen Loch beobachtet?

- Der Reisende erscheint immer stärker rotverschoben.
- Der Reisende erreicht den Ereignishorizont nicht in endlicher Eigenzeit des Beobachters.

Was erlebt der Reisende?

- Er erreicht den Ereignishorizont in endlicher Eigenzeit.
- Er kann den Ereignishorizont überqueren.
- Es gibt keinen Weg zurück.
- Er erreicht die Singularität bei $r = 0$ auf jeden Fall.

Singularitäten

Was ist mit der Singularität bei $r = 0$?

- Artefakt der symmetrischen Vakuumlösung? Nein!
- Singularitäten sind auch bei realistischem Gravitationskollaps unausweichlich!
- Genaue Beschreibung erfordert eine Quantentheorie der Gravitation!

Vermutung über die Kosmische Zensur

Singularitäten sind immer hinter Ereignishorizonten verborgen.

Thermodynamik schwarzer Löcher

Bisherige Ergebnisse zu Schwarzen Löchern:

- Sie absorbieren lediglich Strahlung und Materie.
- Sie zeigen keinerlei Emission.

Kann man ein solches Objekt überhaupt thermodynamisch beschreiben?

Penrose Prozess

Es ist möglich rotierenden schwarzen Löchern Energie auf Kosten ihres Drehimpulses zu entziehen!

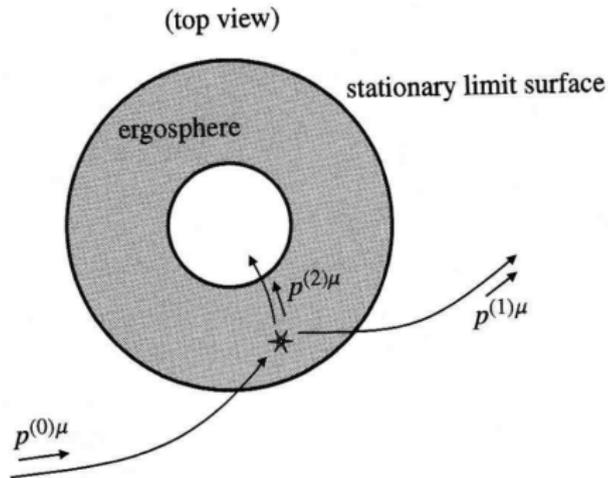


Abbildung: Illustration des Penrose-Prozesses [1]

Penrose Prozess

Rechnung ergibt:

$$dM = \frac{\xi}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ$$

ξ : Gravitationsbeschleunigung

Vergleiche mit erstem Hauptsatz der Thermodynamik

$$dE = T dS - p dV$$

Korrespondenz zwischen thermodynamischen Größen und denen eines schwarzen Loches:

- $E \leftrightarrow M$
- $S \leftrightarrow \frac{A}{4G}$
- $T \leftrightarrow \frac{\xi}{2\pi}$

Hauptsätze der Schwarzdynamik

Alle thermodynamischen Hauptsätze finden Entsprechungen in Sätzen über Schwarze Löcher:

0. Hauptsatz TD

Ein Körper im thermodynamischen Gleichgewicht hat überall dieselbe Temperatur.

1. Hauptsatz TD

$$dE = TdS - pdV$$

0. Hauptsatz SLD

Der Ereignishorizont eines schwarzen Loches besitzt konstante Gravitationsbeschleunigung.

1. Hauptsatz SLD

$$dM = \frac{\xi}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ + \Phi dQ$$

Hauptsätze der Schwarzdynamik

2. Hauptsatz TD

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

2. Hauptsatz SLD

$$\frac{dA}{dt} \geq 0$$

3. Hauptsatz TD

Der absolute
Temperaturnullpunkt lässt sich
nicht erreichen.

3. Hauptsatz SLD

Es existiert kein schwarzes Loch
mit verschwindender
Gravitationsbeschleunigung.

Hawking-Strahlung

Quantenmechanische Betrachtung der Umgebung eines schwarzen Lochs:

- Vakuum ist nicht „leer“ → ständige Erzeugung und Vernichtung von Teilchen-Antiteilchenpaaren im Rahmen der Unschärferelation
- Nahe des Ereignishorizontes kann ein Teilchen ins schwarze Loch fallen. Der andere Partner entweicht in die Unendlichkeit. Nötige Energie stellt das schwarze Loch zur Verfügung.
- Energieverlust führt zum Schrumpfen des Loches.

Hawking-Strahlung

Temperatur der Hawking-Strahlung

$$T = \frac{1}{8\pi GM}$$

⇒ je leichter desto heißer ist das Loch!

$$T_{BH} \geq T_{CMB} \text{ für } M_{BH} \leq M_{Erde}$$

Achtung!

Formeln nur gültig bis $m_{Planck} \approx 22 \mu\text{g}$. Weitere Entwicklung unklar!

Stellare schwarze Löcher

Stellare Schwarze Löcher: $M \leq 100M_{sun}$

Nachweis isolierter Kandidaten ist aussichtslos.

Deswegen Nachweis in Doppelsternsystemen:

- Optisch sichtbarer Stern kreist um optisch unsichtbaren Partner
- Unsichtbarer Partner akkretiert Material des Begleiters
- Akkretiertes Material wird stark aufgeheizt → Emission im Röntgenbereich
- Massenbestimmung des unsichtbaren Objekts über Bahnkurve des Begleiters

Stellare schwarze Löcher

Nachweiskriterium

Ist die Masse des unsichtbaren Objekts größer als drei Sonnenmassen handelt es sich ziemlich sicher um ein schwarzes Loch.

Beispiel: Cygnus X-1

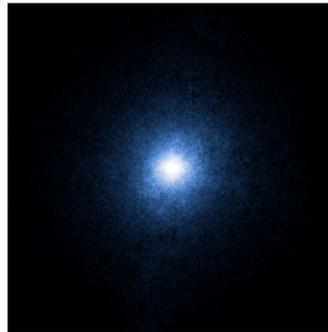


Abbildung: Aufnahme von Cygnus X-1 mit CHANDRA [6]

Supermassive schwarze Löcher

Supermassive Schwarze Löcher: $M \geq 10^6 \cdot M_{sun}$

Beispiel: *Sagittarius A** im Zentrum unserer Milchstraße

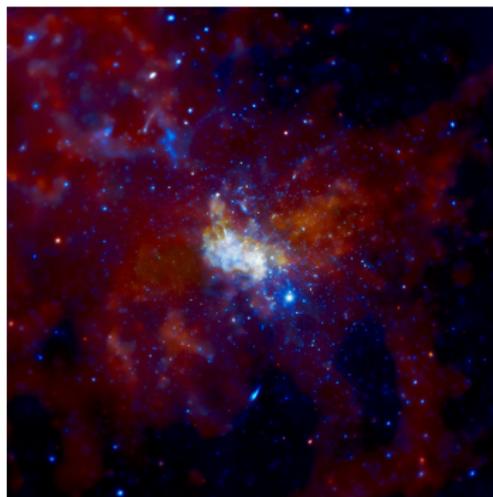


Abbildung: Aufnahme von *Sagittarius A** mit CHANDRA [6]

Nachweis ähnlich zu stellaren schwarzen Löchern:

- Beobachtung vieler Sternorbits in der Nähe des galaktischen Zentrums
- Gemeinsamer Mittelpunkt der Bewegungen ist dunkel.
- Bahngeschwindigkeiten von teils mehr als $\frac{1}{100}c$ in einer Entfernung von 120 AU
- Daraus Massenabschätzung des zentralen Objekts zu $4,3 \cdot 10^6 M_{Sun}$

Schlussfolgerung

Kein anderes Objekt kann solch große Masse auf so kleinem Volumen vereinen wie ein schwarzes Loch.

Offene Fragen

Fragen experimenteller Natur:

- Nachweis schwarzer Löcher in einem mittleren Massenbereich
- Bildung supermassiver schwarzer Löcher

LISA

Gravitationswellendetektoren können in Zukunft entscheidende Beiträge zu dieser Frage liefern.

Fragen theoretischer Natur:

- Wahre Natur von Singularitäten
- Endphase schwarzer Löcher

Quantentheorie der Gravitation

Einige Theorien stehen in den Startlöchern wie Schleifenquantengravitation (LQG) und auch Stringtheorien.

Quellenverzeichnis

- [1] Carrol, S., Spacetime and Geometry, Addison Wesley, 2004.
- [2] Schutz, B., A First Course in General Relativity, Cambridge University Press, 2009.
- [3] Chandrasekhar, S., The Mathematical Theory of Black Holes, Oxford University Press, 1992.
- [4] Hawking, S., Ellis, G.F.R., The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, 1973.
- [5] <http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/xray1/xray1chap6toc.html>
- [6] <http://chandra.harvard.edu/>