

Vortrag im Rahmen des Kompaktseminars
Frühes Universum
im WiSe 2003/04 an der Universität Tübingen

Weltmodelle I: Friedmann-Modell des Universums

Markus Kromer

22. März 2004

Betreut durch Jörn Wilms

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Friedmann-Modell des Universums	6
2.1	Grundlagen	6
2.1.1	Das Galaxiengas	6
2.1.2	Kosmologisches Prinzip	6
2.1.3	Mitbewegtes Koordinatensystem	7
2.1.4	Skalenfaktor	9
2.1.5	Robertson-Walker-Metrik	10
2.2	Kinematik	12
2.2.1	Lichtausbreitung	12
2.2.2	Helligkeitsentfernung	13
2.2.3	Hubble-Beziehung	14
2.3	Dynamik	15
2.3.1	Zustandsgleichung	15
2.3.2	Friedmann-Gleichung im Rahmen der ART	16
2.3.3	Alternative Newtonsche Herleitung der Friedmann-Gleichungen	17

Bezeichnungen

- \vec{x}, x^α Dreivektor, griechische Indizes laufen über $\alpha = 1, 2, 3$
 \mathbf{x}, x^a Vierervektor, lateinische Indizes laufen über $a = 0, 1, 2, 3$
 E Ereignis in der Raum-Zeit mit Koordinaten x^a (E)

1 Einführung

Wir wollen hier ein Modell entwickeln, das uns die Dynamik des Universums als Ganzes beschreiben kann. Historisch gesehen wurden solche Modelle erst nach Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) von A. Einstein 1916 untersucht. Deswegen werden auch wir unser Modell, das auf die voneinander unabhängigen Arbeiten von A. Friedmann (1922) und G. Lemaitre (1927) zurückgeht, im Rahmen einer relativistischen Kosmologie ableiten und erst zum Schluss eine alternative Newtonsche Ableitung geben, die im Wesentlichen zum gleichen Ergebnis führt.

Die Geburtsstunde der modernen Kosmologie stellte schließlich 1929 die Beobachtung von E. Hubble dar, dass die **Rotverschiebung**

$$z = \frac{\lambda_{\text{observed}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} = \frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}} - 1 \quad (1.1)$$

von Spektrallinien entfernter Galaxien proportional mit deren Entfernung d anwächst.

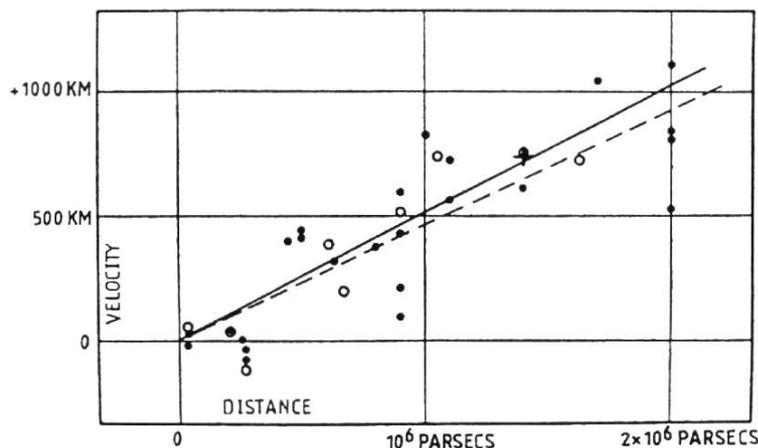


Abbildung 1.1: Von Hubble 1929 gefundene Korrelation zwischen Rotverschiebung und Entfernung entfernter Galaxien

Diese Rotverschiebung deutete man als Dopplereffekt

$$\frac{\lambda_{\text{observed}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} = \frac{v}{c} \quad (1.2)$$

und fand so für die Fluchtgeschwindigkeit entfernter Galaxien die Beziehung

$$v = cz = H_0 d \quad (1.3)$$

die wir **Hubble-Gesetz**¹ nennen. Das Universum expandiert also und die **Hubble-Konstante** H_0 gibt die, durch die Expansion bedingte, Geschwindigkeit eines Objekts an. Zu ihrer Bestimmung müssen Rotverschiebung und Entfernung weit entfernter Objekte (Galaxien, Quasare) gemessen werden.

Während z spektroskopisch hinreichend genau bestimmt werden kann, ist die kosmologische Entfernungsbestimmung problematisch und nur für Objekte mit bekannter absoluter Leuchtkraft (Standardkerzen), wie z.B. veränderliche Sterne mit bekannter Perioden-Leuchtkraft-Beziehung und Supernovae vom Typ Ia möglich. Denn dann gilt für den pro Einheitsfläche registrierten Fluss F

¹Im folgenden wollen wir Einheiten mit $\hbar = c = 1$ verwenden, also $v = z = H_0 d$.

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (1.4)$$

wenn die Quelle mit absoluter Leuchtkraft L im Abstand d_L (Helligkeitsentfernung) zu uns liegt. Damit lässt sich das Hubble-Gesetz in folgender Form schreiben

$$cz = H_0 \cdot \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

Der heute angenommene Wert von H_0 (best fit), der auf Messungen mit dem Hubble-Space-Telescope beruht, beträgt

$$H_0 = (72 \pm 8) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \quad (1.5)$$

Häufig verwendet man auch folgende Darstellung für die Hubble-Konstante

$$H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$$

Für den best fit Gl. (1.5) ergibt sich dann $h = 0,72 \pm 0,08$, während eine konservativere Angabe z.B. $h = 0,45 \dots 0,90$ wäre.

Ist H_0 einmal ausreichend genau bestimmt worden, kann man aus Gl. (1.3) umgekehrt Entfernungen berechnen. Außerdem wird durch die reziproke Hubble-Konstante H_0^{-1} unter der Annahme einer für alle Objekte gleichen Expansion mit konstanter Geschwindigkeit v die sogenannte **Hubble-Zeit**

$$\tau_0 = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0} \quad (1.6)$$

definiert. Dies ist eine erste Näherung für das Alter des Universums. Mit dem Wert aus Gl. (1.5) ergibt sich also

$$\tau_0 \approx 13,6 \cdot 10^9 \text{a}$$

Grundgedanken der ART

Der ART liegt die Annahme einer **vierdimensionalen Raum-Zeit** zu Grunde, die durch das Vorhandensein von Materie (bzw. allgemeiner Energie) gekrümmt wird. Die Punkte in diesem vierdimensionalen Raum stellen Ereignisse der Raum-Zeit dar und werden durch einen Vierervektor \mathbf{x} mit Komponenten x^a beschrieben.

Die Geometrie der Raum-Zeit wird durch das sogenannte Linienelement

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (1.7)$$

beschrieben², das durch den metrischen Tensor g_{ab} (ein Vierertensor 2-ter Stufe) beschrieben wird. Die Wechselwirkungen zwischen Materie und der Raum-Zeit selbst beschreiben die **Einsteinschen Feldgleichungen**, die sich in folgender Tensor-Schreibweise zusammenfassen lassen

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (1.8)$$

dabei ist der Einstein-Tensor

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (1.9)$$

eine Funktion des metrischen Tensors g_{ab} sowie des Ricci-Tensor R_{ab} und des Ricci-Skalars R , die beide wiederum eine Funktion von g_{ab} sind. Λ ist die kosmologische Konstante, G die Gravitationskonstante und T_{ab} der Energie-Impuls-Tensor, der die Krümmung der Raum-Zeit durch die vorhandene Energie (Materie, Strahlung) beschreibt.

²Hier und im folgenden soll die Einsteinsche Summenkonvention verwendet werden, nach der über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist, d.h. $g_{ab} dx^a dx^b = \sum_{a,b} g_{ab} dx^a dx^b$.

2 Friedmann-Modell des Universums

2.1 Grundlagen

2.1.1 Das Galaxiengas

Die einfachste Methode das Universum als Ganzes zu betrachten, ist die Galaxien im Universum als „Elementarteilchen“ eines „Gases“ anzunehmen. Dabei geht neben der inneren Struktur der Galaxien auch ihre Anordnung in Clustern auf (kosmologisch) kleinen Skalen ($\lesssim 100\text{Mpc}$) verloren.

In einer weiteren Näherung betrachten wir dieses Gas außerdem als **ideale Flüssigkeit**. Deren Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = u^a$ ist gleich der Vierergeschwindigkeit eines Beobachters, der die Galaxien in seiner Umgebung im Mittel¹ in Ruhe sieht. In diesem Bezugssystem wird auch die Massenenergiedichte ρ der Flüssigkeit definiert. Sie ist durch die mittlere Dichte von Ruhemasse und kinetischer Energie der Galaxien in einem Einheitsvolumen gegeben. Mit dem kinetischen Druck der Galaxien p und dem metrischen Tensor g^{ab} kann der Energie-Impuls-Tensor für das Galaxiengas dann in folgender Form angegeben werden

$$T^{ab} = (\rho + p) u^a u^b - p g^{ab} \quad (2.1)$$

p und ρ enthalten dabei Materie- (z.B. Galaxien, cosmic rays) und Strahlungsbeiträge (z.B. e/m-Strahlung, Gravitationswellen) jeglicher Form.

2.1.2 Kosmologisches Prinzip

Eine entscheidende Rolle für die folgenden Überlegungen spielt das kosmologische Prinzip. Bei ihm handelt es sich um ein Postulat, das man als Verallgemeinerung des kopernikanischen Prinzips auffassen kann. Seine Kernaussage ist, dass das Universum zu jedem Zeitpunkt von jedem Punkt aus den gleichen Anblick bietet.

Dies wollen wir nun etwas genauer spezifizieren. Dazu müssen wir zuerst festlegen, was mit der Formulierung „zu jedem Zeitpunkt“ gemeint ist. Da es in der ART im allgemeinen keine globalen Inertialsysteme gibt², ist diese Formulierung ziemlich unbrauchbar. Stattdessen betrachten wir raumartige Schnitte, d.h. dreidimensionale Hyperflächen der Raum-Zeit mit $t = \text{const.}$ (Abbildung 2.1). Jeder Punkt dieser Flächen stellt zusammen mit t ein Ereignis E in der Raum-Zeit dar.

Im Rahmen der ART ist die Forderung, dass das Universum „zu jedem Zeitpunkt“ von jedem Punkt aus den gleichen Anblick bietet, also so zu verstehen, dass „jede raumartige Hyperfläche“ von jedem Punkt aus den gleichen Anblick bietet. D.h. die **raumartigen Hyperflächen** müssen **homogen und isotrop** sein. Homogenität meint dabei, dass die physikalischen Bedingungen wie ρ , p und die Krümmung der Raum-Zeit an jedem Punkt solch einer Hyperfläche gleich sein müssen. Die Isotropie sorgt dafür, dass an keinem Punkt solch einer Hyperfläche eine Richtung vor den anderen ausgezeichnet ist. Dass die Forderung der Isotropie nicht für Beobachter gelten kann, die sich in beliebiger Weise bewegen, ist auch klar – vielmehr werden dadurch die Beobachter, die sich mit dem Galaxiengas bewegen ausgezeichnet.

Eine direkte Folge der Isotropie ist, dass sich die Teilchen des Galaxiengases entlang Weltlinien

¹Die Eigengeschwindigkeit der Galaxien im Rahmen der Dynamik innerhalb eines Haufens wird dabei vernachlässigt.

²D.h. man kann nicht wie in der SRT ein Inertialsystem als Bezugssystem wählen, um die Gleichzeitigkeit von Ereignissen in verschiedenen Inertialsystemen zu untersuchen.

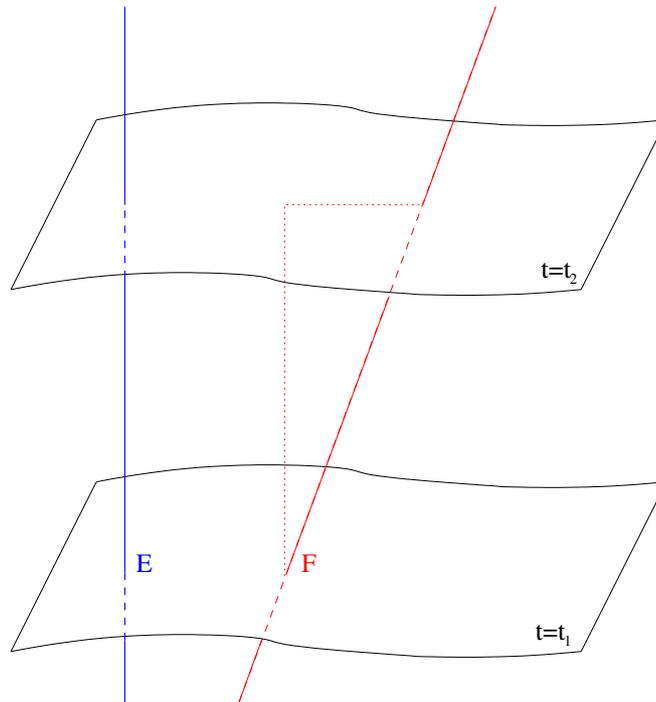


Abbildung 2.1: Raumartige Hyperflächen der Raumzeit mit möglicher (E) und unmöglicher (F) Weltlinie des Galaxiengases

bewegen, die jede der homogenen raumartigen Hyperflächen orthogonal schneiden (vgl. Abbildung 2.1). Denn sonst würde ein mit dem Galaxiengas bewegter Beobachter F sich relativ zur Hyperfläche bewegen und so wäre für ihn eine Richtung ausgezeichnet.

Da die Geometrie des Raumes im Rahmen der ART durch die Massenverteilung bestimmt wird, bedeutet das kosmologische Prinzip also eine homogene und isotrope Massenverteilung im Universum. Obwohl ein Blick an den Himmel nahelegt, dies zu verneinen, findet man das kosmologische Prinzip, auf große Distanzen ($\gtrsim 100\text{Mpc}$) in guter Näherung erfüllt, wie Galaxienkataloge (Abbildung 2.2) und auch der diffuse Röntgenhintergrund (Abbildung 2.3) zeigen. Eine sehr gute Bestätigung der Isotropie findet man in der 3K-Hintergrundstrahlung (cosmic microwave background CMB, Abbildung 2.4). Erste Anzeichen einer Anisotropie findet man hier erst für ein Verhältnis $\frac{\Delta T}{T} = 10^{-4}$.

2.1.3 Mitbewegtes Koordinatensystem

Mit diesen Voraussetzungen können wir nun das sogenannte mitbewegte Koordinatensystem (co-moving coordinates) einführen. Dazu wählen wir eine homogene raumartige Hyperfläche Σ_i (das i steht dabei für initial und ist kein Laufindex) mit einem beliebigen Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3) . Für die Zeitkoordinate der Ereignisse auf der Hyperfläche gilt $x^0 = t_i$. Betrachten wir nun die zeitliche Entwicklung der Weltlinien der Elementarteilchen des Galaxiengases, so finden wir, dass deren **Raumkoordinaten konstant** bei dem Wert verharren, den sie am Schnittpunkt mit der Hyperfläche Σ_i haben.

Als **Zeitkoordinate** t eines Ereignisses E wählen wir schließlich die entlang der Weltlinie des Galaxiengases zwischen Σ_i und E vergangene **Eigenzeit** $d\tau$

$$t(E) = t_i + \int_{t_i}^E d\tau$$

Diese Wahl der Zeitkoordinate stellt zusammen mit den Einsteinschen-Feldgleichungen sicher, dass jede raumartige Hyperfläche mit $t = \text{const.}$ auch homogen ist, wenn Σ_i für $t = t_i$ homogen war.

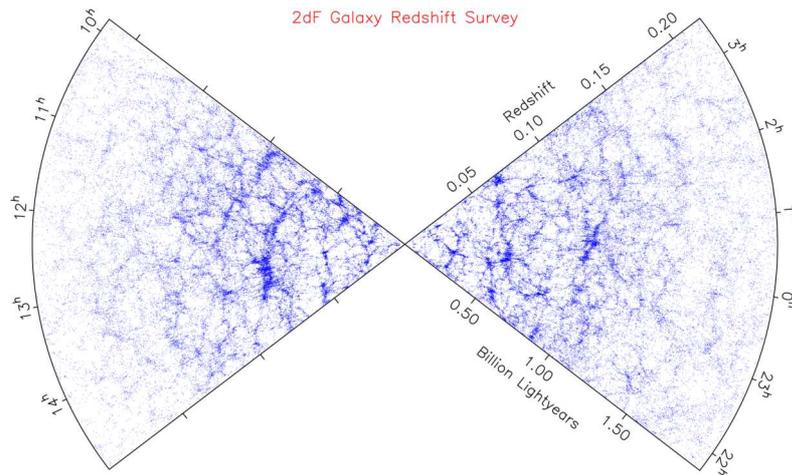


Abbildung 2.2: In den Ergebnissen des 2dF Galaxy Redshift Surveys, der ca. 220.000 Galaxien umfasst, findet man das kosmologische Prinzip auf großen Distanzen gut erfüllt [7]

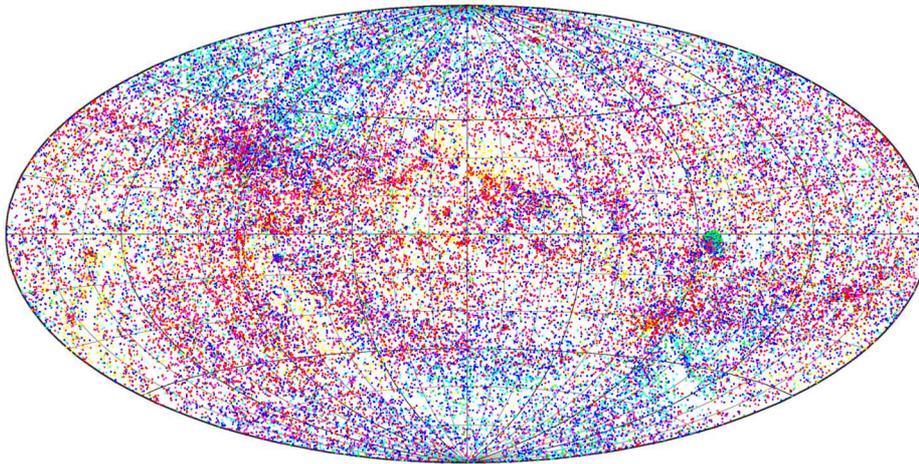


Abbildung 2.3: Auch der ROSAT All Sky Survey im Energiebereich von 0,1...2,4 keV zeigt eine klare Isotropie. Dabei handelt es sich primär um weit entfernte AGN [8]

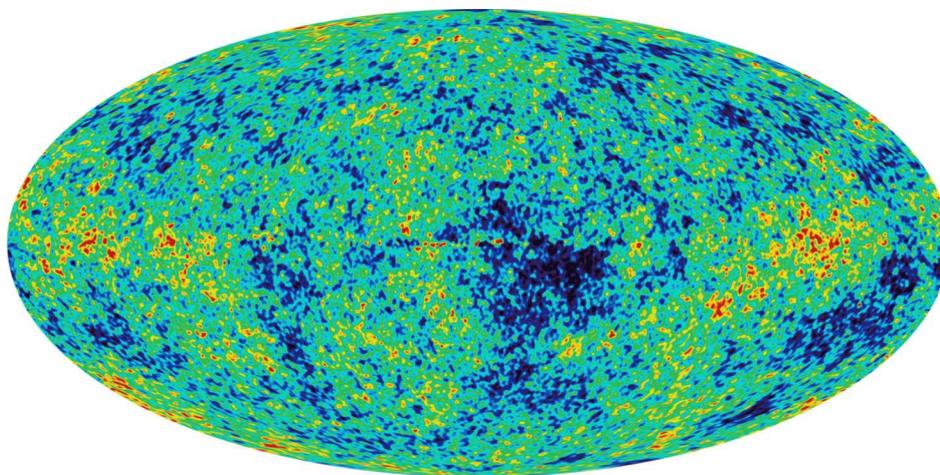


Abbildung 2.4: Von WMAP gemessene Temperaturverteilung des CMB: rote Bereiche sind wärmer, blaue kühler. [10]

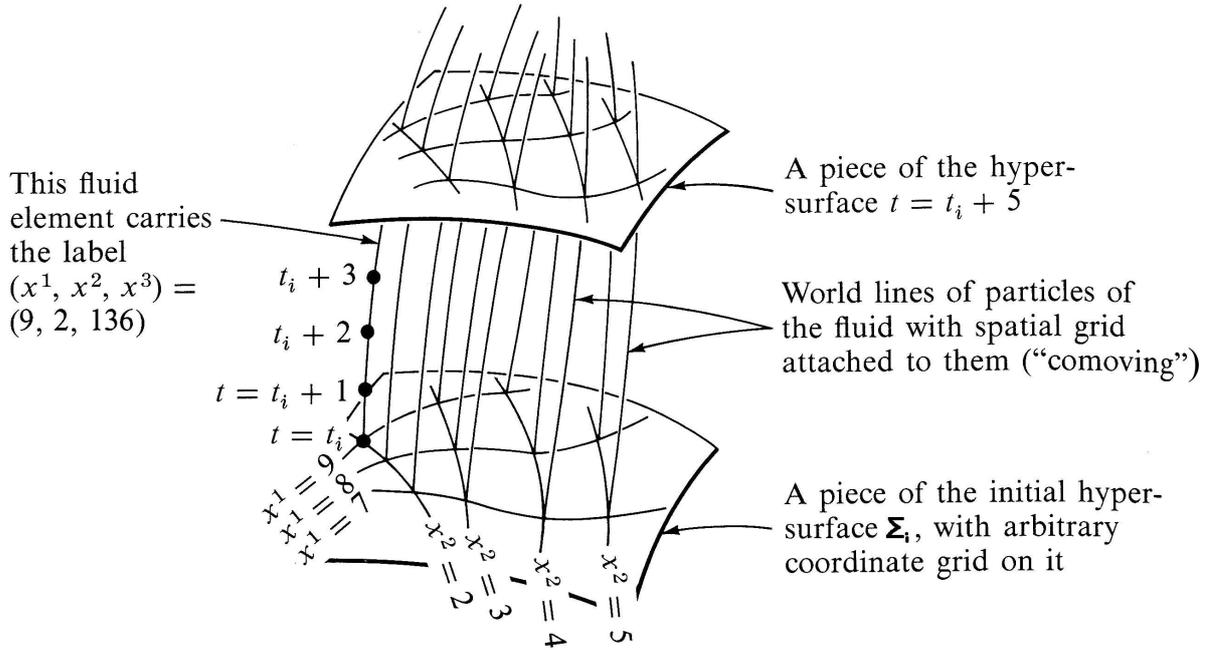


Abbildung 2.5: Mitbewegtes Koordinatensystem [4]

Die Metrik dieses mitbewegten Koordinatensystem bekommt nun eine besonders einfache Form, denn für jedes Ereignis E auf Σ_i sind die räumlichen Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ tangential zur Hyperfläche, während der zeitliche Basisvektor $\frac{\partial}{\partial t}$ tangential zur Weltlinie des Galaxiengases und damit orthogonal zur Hyperfläche ist. Mit

$$g_{ab} = \frac{\partial}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x^b}$$

folgt schließlich

$$g_{0\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = 0$$

Weil die Zeitkoordinate die Eigenzeit entlang der Weltlinien des Galaxiengases misst, gilt ferner $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} = \mathbf{u}$ und damit

$$g_{00} = \frac{\partial}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$$

weil die Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} automatisch normiert ist. Für das Linienelement folgt dann

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = dt^2 - \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.2)$$

wenn $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ eine positiv definite (3×3) -Matrix ist.

2.1.4 Skalenfaktor

Für die Metrik des Raumanteils auf den einzelnen Hyperflächen gilt also

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}(t, x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta$$

In einem ersten Schritt wollen wir nun die zeitliche Entwicklung dieser Metrik untersuchen. Dazu nehmen wir an, dass uns der metrische Tensor der zu $t = t^*$ gehörenden Hyperfläche Σ^* bekannt sei

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}^*(x^\gamma) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(t^*, x^\gamma)$$

Dann gilt für die Eigenentfernung zweier benachbarter Weltlinien des Galaxiengases mit Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$ auf der Hyperfläche Σ^*

$$\Delta \tilde{s}(t^*) = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta}^*(x^\gamma) \Delta x^\alpha \Delta x^\beta}$$

Zur späteren Zeit (auf der Hyperfläche Σ) ist der Eigenabstand dann $\Delta\tilde{s}(t)$. Wegen der Isotropie ist das Verhältnis $\Delta\tilde{s}(t)/\Delta\tilde{s}(t^*)$ unabhängig von der „Richtung“ zwischen den beiden Weltlinien. Die Homogenität macht das Verhältnis zugleich unabhängig von der Ausgangsposition (x^1, x^2, x^3) auf der Hyperfläche Σ^* . Damit gibt das Verhältnis

$$a(t) = \frac{\Delta\tilde{s}(t)}{\Delta\tilde{s}(t^*)} \quad (2.3)$$

den Wert an, um den die Entfernung zwischen zwei Weltlinien in der Zeit $\Delta t = t - t^*$ anwächst. Man nennt $a(t)$ den **Skalenfaktor**. Der gesuchte Abstand $\Delta\tilde{s}(t)$ lässt sich dann als

$$\Delta\tilde{s}(t) = a(t) \cdot \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta}^*(x^\gamma) \Delta x^\alpha \Delta x^\beta}$$

schreiben. Das zugehörige Linienlement ist dann

$$d\tilde{s}^2 = a^2(t) \cdot \tilde{g}_{\alpha\beta}^*(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta$$

womit die Metrik der Raum-Zeit also durch

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \tilde{g}_{\alpha\beta}^*(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.4)$$

beschrieben wird. $\tilde{g}_{\alpha\beta}^*$ beschreibt also nicht nur die Gestalt der Hyperfläche Σ^* für $t = t^*$, sondern auch die aller anderen Hyperflächen mit $t = \text{const.}$!

Das einzige, was sich mit der Zeit ändert ist der Skalenfaktor: das Universum expandiert. Auch diese Eigenschaft ist eine Folge des kosmologischen Prinzips. Man kann sich den Effekt gut wie das Aufblasen eines Luftballons vorstellen, auf dessen Oberfläche Pfennigstücke geklebt wurden (Abbildung 2.6). Die unveränderlichen Pfennigstücke repräsentieren dann z.B. ein Atom³. Egal welches Pfennigstück wir nun betrachten, alle anderen Pfennigstücke entfernen sich von diesem mit der Zeit und zwar um so schneller, je größer die anfängliche Entfernung war.

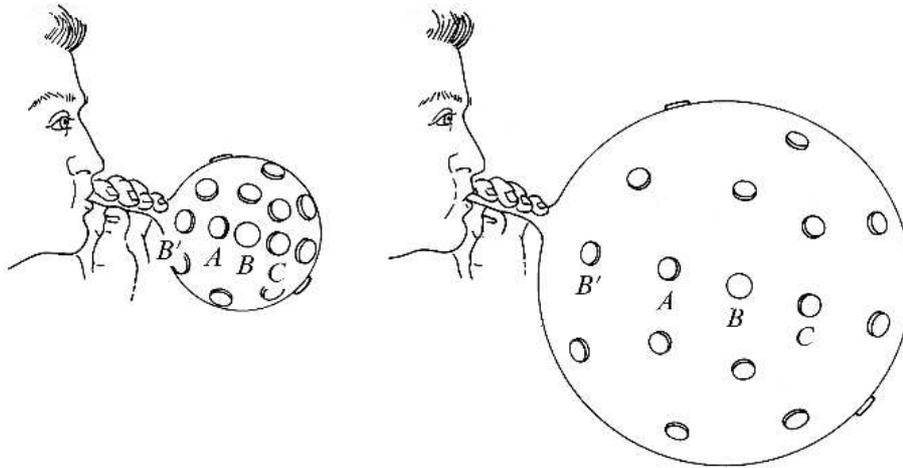


Abbildung 2.6: Modell zur Expansion des Universums: Aufblasen eines Luftballons [4]

2.1.5 Robertson-Walker-Metrik

Um die Metrik der Raum-Zeit vollständig angeben zu können, müssen wir nun noch die 3-Metrik unserer beliebig gewählten Hyperfläche Σ^* festlegen. Auf Grund der Homogenität und Isotropie von Σ^* wissen wir, dass dies eine euklidische Metrik mit maximaler Symmetrie sein muss. Das bedeutet insbesondere sphärische Symmetrie

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta = f^2(r) dr^2 + g^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.5)$$

³Dessen Dimensionen bleiben auch kosmologisch dieselben, weil Homogenität und Isotropie hier keinen Sinn machen.

Als eine mögliche Darstellung der Funktionen $f(r)$ und $g(r)$ findet man bei der Untersuchung des Krümmungstensors von $\tilde{g}_{\alpha\beta}^*$

$$f^2(r) = \frac{1}{1 - Kr^2} \quad g^2(r) = r^2$$

wobei K eine beliebige Konstante ist, die Krümmung genannt wird. Damit folgt für das Linienelement der Raum-Zeit

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad (2.6)$$

Die Substitution

$$\begin{aligned} K &\rightarrow k = \frac{K}{|K|} \\ r &\rightarrow \sqrt{|K|} \cdot r \\ a(t) &\rightarrow \begin{cases} \frac{a(t)}{\sqrt{|K|}} & \text{für } K \neq 0 \\ a(t) & \text{für } K = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

überführt Gl. (2.6) schließlich in folgende Form, die man Robertson-Walker-Metrik nennt

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad (2.7)$$

Hieran sieht man zum einen, dass die **Krümmung der Hyperfläche allein durch den Faktor k bestimmt** wird, der wiederum auf die drei Werte $k = -1$, $k = 0$, und $k = 1$ beschränkt ist. Zum anderen soll noch einmal erwähnt werden, dass die ganze zeitliche Entwicklung in $a(t)$ enthalten ist. Bevor wir uns aber mit deren Lösung beschäftigen, wollen wir noch die durch k zugelassenen Geometrien vorstellen und die direkten Auswirkungen der Metrik auf die Kinematik darstellen.

Mögliche Geometrien des dreidimensionalen Raums in der Robertson-Walker-Metrik

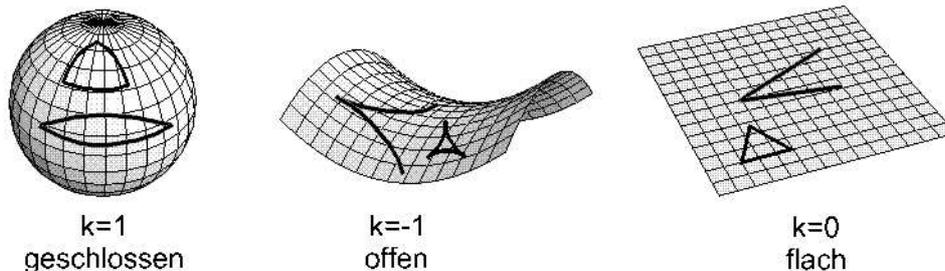


Abbildung 2.7: Raumanteil der Robertson-Walker-Metrik in Abhängigkeit von k , nach [9]

Um die geometrischen Eigenschaften der zu den verschiedenen Werten von k gehörenden, raumarartigen Hyperflächen der Robertson-Walker-Metrik zu untersuchen, führen wir eine neue Koordinate χ ein, die durch

$$\chi = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r) \quad (2.8)$$

gegeben ist, wobei

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin^{-1} r & \text{für } k = +1 \\ r & \text{für } k = 0 \\ \sinh^{-1} r & \text{für } k = -1 \end{cases} \quad (2.9)$$

ist. Die 3-Metrik lässt sich mit den Koordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ dann als

$$d\tilde{s}^2 = a^2(t) \cdot [d\chi^2 + S_k(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \quad (2.10)$$

schreiben, wobei

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{für } k = +1 \\ \chi & \text{für } k = 0 \\ \sinh \chi & \text{für } k = -1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Für $k = 0$ ist der Raumanteil nach Gl. (2.10) also durch die ganz normale, **flache** euklidische Geometrie gegeben (siehe Abbildung 2.7). Für $k = +1$ stellt Gl. (2.10) eine, in einen fiktiven vierdimensionalen Raum (nicht die Raum-Zeit!) eingebettete, dreidimensionale Sphäre mit Radius $a(t)$ dar. Dieser Raum hat ein endliches Volumen, weshalb man von einem **geschlossenen** Modell spricht. Als letzte Möglichkeit müssen wir $k = -1$ betrachten. Dann liefert Gl. (2.10) den Ausdruck für ein Hyperboloid, das ebenfalls in einen fiktiven vierdimensionalen Raum eingebettet ist. In diesem Fall nennt man den Raum **offen**.

2.2 Kinematik

2.2.1 Lichtausbreitung

Bei der Untersuchung der Lichtausbreitung wollen wir von der Bedingung ausgehen, die die ART an die Weltlinie eines Photons stellt

$$ds^2 = 0 \quad (2.12)$$

Wegen der Isotropie können wir uns ferner auf eine radiale Bewegung beschränken ($d\vartheta = d\varphi = 0$) und auch die Position des Beobachters dürfen wir wegen der Homogenität o.B.d.A. im Ursprung (Weltlinie $r = 0$) annehmen. Damit folgt aus dem Linienelement Gl. (2.7) für ein Photon die Bedingung

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.13)$$

Dabei gilt das Pluszeichen für sich entfernende und das Minuszeichen für sich nähernde Photonen.

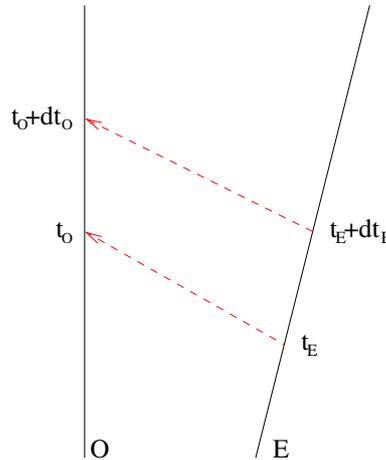


Abbildung 2.8: Beobachter O empfängt von der Galaxie E zu verschiedenen Zeiten emittiertes Licht

Wählen wir nun einen Beobachter O mit Weltlinie $r = r_O = 0$, der zur Koordinatenzeit t_O , das von der Galaxie E mit Weltlinie $r = r_E$ zur Koordinatenzeit t_E ausgesandte Photon registriert, so gilt

$$\int_{t_E}^{t_O} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_E}^{r_O} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_E} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r_E)$$

wobei $f_k(r)$ in Gl. (2.9) definiert ist. Ganz analog finden wir für ein zweites von E zum Zeitpunkt $t_E + \Delta t_E$ ausgesandtes Photon, das in O zur Koordinatenzeit $t_O + \Delta t_O$ registriert wird

$$\int_{t_E + \Delta t_E}^{t_O + \Delta t_O} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_E} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r_E)$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_E + \Delta t_E}^{t_O + \Delta t_O} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_E}^{t_O} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_E + \Delta t_E}^{t_O + \Delta t_O} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_O}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_E}^{t_E + \Delta t_E} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_E}^{t_E + \Delta t_E} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_{t_O}^{t_O + \Delta t_O} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_E}^{t_E + \Delta t_E} \frac{dt}{a(t)} \end{aligned}$$

Für genügend kleine Δt_O und Δt_E können wir $a(t)$ als konstant annehmen und vors Integral ziehen. Wir erhalten dann

$$0 = \frac{\Delta t_O}{a(t_O)} - \frac{\Delta t_E}{a(t_E)} \quad (2.14)$$

Rotverschiebung. Angenommen Δt_O und Δt_E entspricht gerade der Periodendauer einer Schwingung, dann folgt aus Gl. (2.14) in unseren Einheiten ($c = 1$) mit $\lambda_O = \Delta t_O$ und $\lambda_E = \Delta t_E$

$$\frac{\lambda_E}{\lambda_O} = \frac{a(t_E)}{a(t_O)}$$

Mit der Definition der Rotverschiebung z in Gl. (1.1) finden wir also

$$1 + z = \frac{\lambda_O}{\lambda_E} = \frac{\nu_E}{\nu_O} = \frac{a(t_O)}{a(t_E)} \quad (2.15)$$

Diese kosmologische Rotverschiebung beruht also nur auf der Ausdehnung des Raums und sollte deswegen weder mit einer klassischen Dopplerverschiebung $z = \frac{v}{c}$ noch einer speziell relativistischen $1 + z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$ verwechselt werden. Umgekehrt würde man bei einer Kontraktion eine Violettverschiebung messen.

Zeitdilatation. Aus Gl. (2.14) folgt außerdem

$$\frac{\Delta t_O}{a(t_O)} = \frac{\Delta t_E}{a(t_E)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{a(t)} = \text{const.}$$

bzw.

$$\frac{dt_{\text{obs}}}{dt_{\text{emit}}} = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})} = 1 + z \quad (2.16)$$

d.h. für Objekte mit großer Rotverschiebung erwarten wir eine Zeitdilatation. Diese lässt sich in den Lichtkurven entfernter Supernova-Ausbrüche auch experimentell bestätigen.

2.2.2 Helligkeitsentfernung

Die soeben gefundene Rotverschiebung stellt, da die kosmologischen Beobachtungen auf elektromagnetischer Strahlung beruhen, eine gut zugängliche Messgröße dar. Interessant ist für uns aber in erster Linie die Entfernung zu den Quellen der Strahlung und diese lässt sich aus dem reinen Verhältnis von Skalenfaktoren nicht bestimmen.

Deswegen wollen wir hier die Definition der relativistischen Helligkeitsentfernung d_L (engl. luminosity distance) erarbeiten, die analog zu der der klassischen Kosmologie Gl. (1.4) definiert ist.

Wir betrachten dazu wieder wie oben einen Beobachter O mit Weltlinie $r = r_O = 0$, der zur Koordinatenzeit t_O ein von der Galaxie E mit Weltlinie $r = r_E$ zur Koordinatenzeit t_E ausgesandtes Photon registriert. Der Eigenabstand dieser Galaxie zur Koordinatenzeit t_O ist dann $r_E \cdot a(t_O)$, so dass sich die im Intervall Δt_E abgestrahlte Energie $L \cdot \Delta t_E$ bei isotroper Emission also auf eine Kugel mit Oberfläche $A = 4\pi r_E^2 \cdot a^2(t_O)$ verteilt. Zugleich wird die emittierte Energie gemäß Gl. (2.15) rotverschoben, so dass gilt

$$F \cdot \Delta t_O = \frac{L \cdot \Delta t_E}{4\pi r_E^2 \cdot a^2(t_O)} \cdot \frac{a(t_E)}{a(t_O)}$$

Nun muss nun noch beachtet werden, dass nach Gl. (2.16) für das Zeitintervall Δt_O

$$\Delta t_O = \frac{a(t_O)}{a(t_E)} \cdot \Delta t_E$$

gilt. Damit folgt schließlich

$$F = \frac{L}{4\pi r_E^2 \cdot a^2(t_O)} \cdot \left[\frac{a(t_E)}{a(t_O)} \right]^2 = \frac{L}{4\pi r_E^2 \cdot a^2(t_O) \cdot (1+z)^2}$$

woraus sich durch Vergleich mit Gl. (1.4) für die **Helligkeitsentfernung**

$$d_L = r_E \cdot a(t_O) \cdot (1+z) \quad (2.17)$$

ergibt.

2.2.3 Hubble-Beziehung

Nun können wir noch zeigen, dass sich die Hubble-Beziehung als direkte Konsequenz eines Friedmann-Modells ergibt. Dazu entwickeln wir den Skalenfaktor $a(t)$ um den gegenwärtigen Zeitpunkt $t = t_0$

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \\ &= a_0 + \dot{a}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}_0 \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

wobei der Index 0 also eine Größe zum Zeitpunkt $t = t_0$ bezeichnet. Definieren wir nun noch die **Hubble-Funktion** $H(t)$, deren Wert H_0 , wie wir nachher sehen werden, tatsächlich mit der in Gl. (1.3) definierten Hubble-Konstante identisch ist, und den **Bremssparameter** $q(t)$

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (2.18)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t) H^2(t)} \quad \Rightarrow \quad q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} \quad (2.19)$$

dann folgt

$$a(t) = \frac{1}{a_0} \cdot \left[1 + H_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right]$$

Beachten wir Gl. (2.15), dann erhalten wir

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{\underbrace{1 + H_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)}_{=\zeta}}$$

Mit $(1 + \zeta)^{-1} = 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \dots$ für $|\zeta| < 1$ wird dann

$$\begin{aligned} 1 + z &= 1 - H_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ z &= H_0 \cdot (t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2} q_0 \right) H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Dies lässt sich für $H_0 |t - t_0| \ll 1$ umkehren

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \cdot \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \cdot z^2 \right] + \mathcal{O}(z^3) \quad (2.20)$$

Während dieser Zeit legen Photonen gemäß Gl. (2.13) entlang einer Nullgeodäte

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = f_k(r) \cong r$$

zurück. Es ist also

$$\begin{aligned} a_0 r &\cong a_0 \cdot \int_t^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt \cong a_0 \cdot \int_t^{t_0} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{\dot{a}_0}{a_0^2} (t-t_0) + \dots \right) dt \\ &= (t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0 \cdot (t_0 - t)^2 + \dots \\ &= (t_0 - t) + \left[1 + \frac{1}{2} H_0 \cdot (t_0 - t) + \dots \right] \end{aligned}$$

Setzt man hier Gl. (2.20) ein, so folgt

$$\begin{aligned} a_0 r &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[z + \frac{z}{2} \cdot \left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \cdot z^2 \right) - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \\ &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[z + \frac{z^2}{2} - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \\ &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten schließlich noch mit $1+z$, dann erhält man nach Gl. (2.17) die Helligkeitsentfernung

$$\begin{aligned} d_L = a_0 r \cdot (1+z) &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[\left(z - \frac{1}{2} (1 + q_0) \cdot z^2 \right) \cdot (1+z) + \mathcal{O}(z^3) \right] \\ &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) \cdot z^2 + z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \\ &= \frac{1}{H_0} \cdot \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \end{aligned}$$

und damit die **relativistische Hubble-Beziehung**

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2} (1 - q_0) \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (2.21)$$

die für $z \ll 1$ in das bekannte klassische Hubble-Gesetz Gl. (1.3) übergeht.

2.3 Dynamik

2.3.1 Zustandsgleichung

Um die Entwicklung des Universums beschreiben zu können, benötigt man zusätzlich zur Metrik die Zustandsgleichung der Energie. Dazu müssen wir die Gleichungen der verschiedenen Energieformen unterscheiden.

- **Materie:** wegen der Teilchenzahlerhaltung gilt für die Energiedichte $\rho_m(t) \cdot V(t) = \text{const.}$
- **Strahlung:** die Energiedichte der Strahlung ist sowohl dem Effekt der Expansion, als auch der kosmologischen Rotverschiebung unterworfen. Deswegen gilt $\rho_r(t) \cdot a(t) V(t) = \text{const.}$
- Für die **Vakuumenergie** schließlich ist die Energiedichte unabhängig vom Volumen $\rho_V(t) = \rho_V = \text{const.}$

Beachten wir nun, dass $V(t)$ in unserem mitbewegten Koordinatensystem nur von $a(t)$ abhängen kann, da der hypersphärische Raumwinkel nicht von der Zeit abhängen darf, dann erhalten wir

$$\rho_m(t) \cdot a^3(t) = \text{const.}$$

und

$$\rho_r(t) \cdot a^4(t) = \text{const.}$$

Hieran sieht man, wie bereits in Abschnitt 2.1.5 erwähnt, dass die ganze zeitliche Entwicklung unseres Modells im Skalenfaktor $a(t)$ steckt. Umgekehrt beeinflussen aber auch Dichte (und Druck) dessen Entwicklung. Diese gegenseitige Beeinflussung wird durch die Einsteinschen-Feldgleichungen Gl. (1.8) beschrieben. Die Lösungen dieser Feldgleichungen für unser Modelluniversum, das durch die Robertson-Walker-Metrik und die Näherung der idealen Flüssigkeit beschrieben wird, nennt man Friedmann-Gleichungen. Diese sollen im folgenden plausibel gemacht werden.

2.3.2 Friedmann-Gleichung im Rahmen der ART

Wie wir oben gesehen haben, wirken die Forderungen des kosmologischen Prinzips stark einschränkend auf die Metrik der Raum-Zeit. Dies gilt auch für den Einstein-Tensor Gl. (1.9). So erwarten wir

$$G_{0\alpha} = 0$$

und wegen der Isotropie des Raumes einen diagonalen Raumanteil mit identischen Elementen. Wenn man die einzelnen Komponenten berechnet, findet man dies bestätigt

$$G_{00} = 3 \cdot \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}$$

$$G_{\alpha\beta} = - \left(2 \cdot \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

In den Einstein-Gleichungen Gl. (1.8) werden diese nun den entsprechenden Komponenten des Energie-Impuls Tensors gleichgesetzt. Dieser hat in unserem Modell die Form einer idealen Flüssigkeit Gl. (2.1), die im mitbewegten Koordinatensystem (=ein Beobachter bewegt sich mit der Flüssigkeit) in die Anteile

$$T_{00} = \rho, \quad T_{0\alpha} = 0$$

$$T_{\alpha\beta} = p \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

zerfällt. Setzt man dies nun in die Einsteinschen-Feldgleichungen Gl. (1.8) ein, so erhält man die **Friedmannschen-Gleichungen**

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.22)$$

$$2 \cdot \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp + \Lambda \quad (2.23)$$

die sich durch eine Umformung (obere in untere Gleichung) noch vereinfachen lassen

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \cdot a^2 + \frac{\Lambda}{3} \cdot a^2 - k \quad (2.24)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.25)$$

Die kosmologische Konstante Λ repräsentiert dabei die dem Vakuum innewohnende Energie. Ihren Effekt auf die zeitliche Entwicklung kann man an Gl. (2.25) leicht einsehen. Für $\Lambda = 0$ wird $\ddot{a}(t) < 0$ während $\ddot{a}(t) > 0$ falls $\Lambda \neq 0$ der dominierende Term ist. In einem Modell mit dominierender Vakuumenergie $\Lambda \neq 0$ liegt also immer eine beschleunigte Expansion vor.

Die zeitliche Entwicklung der Hubble-Funktion $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ lässt sich schließlich durch

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2} \quad (2.26)$$

angeben.

2.3.3 Alternative Newtonsche Herleitung der Friedmann-Gleichungen

Wie eingangs erwähnt wollen wir zum Schluss noch zeigen, dass man im Rahmen der Newtonschen Mechanik zu einer ganz ähnlichen Form für die Friedmannschen-Gleichungen gelangt. Das liegt daran, dass die Newtonsche Mechanik den Grenzfall der ART für kleine Distanzen und kleine Mas- sendichten darstellt. Die im kosmologischen Prin- zip geforderte Isotropie stellt nun aber sicher, dass wir Aussagen, die für kleine Distanzen gel- ten, auch auf große Distanzen übertragen können (Skaleninvarianz). D.h. die Newtonsche Beschrei- bung kann dann als klassischer Grenzfall für die ART aufgefasst werden.

Es sei nochmals erwähnt, dass dieser Zugang zur Kosmologie historisch gesehen erst entwickelt wur- de, nachdem das Friedmann-Modell im Rahmen der ART bereits bestand. Er geht zurück auf die Arbeit von McCrea und Milne (1934).

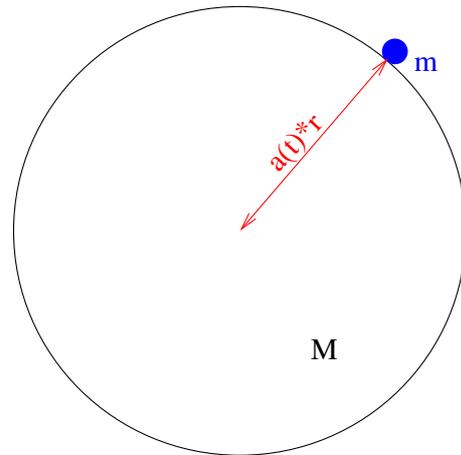


Abbildung 2.9: Zur Newtonschen Ableitung der Friedmann-Gleichungen

Zur Ableitung der Friedmannschen-Gleichungen betrachten wir nun eine endliche, expandierende Kugel, die zum Zeitpunkt t den Eigenradius $R(t) = a(t) \cdot r$ besitzt (Abbildung 2.9). Dabei ist r der mitbewegte Radius und $a(t)$ der Skalenfaktor. Eine Galaxie der Masse m , die sich auf der Kugeloberfläche befindet, erfährt dann die Gravitationskraft

$$\frac{d^2 [a(t) \cdot r]}{dt^2} = - \frac{GM}{[a(t) \cdot r]^2} \quad (2.27)$$

wenn M die in der Kugel enthaltene Masse

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho(t) \cdot [a(t) \cdot r]^3$$

ist. Damit folgt die **Bewegungsgleichung**

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = - \frac{4\pi G}{3} \rho(t) \quad (2.28)$$

Multipliziert man Gl. (2.27) mit $\dot{a}(t)$, so folgt nach partieller Integration

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d[a(t) \cdot r]}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{a(t) \cdot r} = \text{const.}$$

woraus sich die **Energiegleichung**

$$\dot{a}(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \cdot a(t)^2 + \text{const.} \quad (2.29)$$

ergibt. Für $\Lambda = 0$ stimmt die entsprechende relativistisch hergeleitete Friedmann-Gleichung Gl. (2.24) genau mit dieser überein. Die Konstante (kosmologisches Glied und Krümmungsterm für $k \neq 0$) kann im Rahmen der Newtonschen Herleitung aber nicht weiter bestimmt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Camenzind: *From Big Bang to Black Holes* (<http://www.lsw.uni-heidelberg.de/users/mcamenzi/>)
- [2] R. d'Inverno: *Einführung in die Relativitätstheorie* (VCH, 1995)
- [3] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II - Klassische Feldtheorie* (Verlag Harri Deutsch 1997)
- [4] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman 1973)
- [5] T. Padmanabhan: *Theoretical Astrophysics, Vol. III - Galaxies and Cosmology* (Cambridge University Press 2002)
- [6] A. Unsöld, B. Baschek: *Der neue Kosmos* (Springer 2002)
- [7] 2dF Galaxy Redshift Survey, <http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg/>
- [8] MPE, <http://sdss2.icrr.u-tokyo.ac.jp/blackbook/nasasup/rosat.htm>
- [9] N. Strobel, <http://www.astronomynotes.com/>
- [10] NASA/WMAP Science Team, <http://map.gsfc.nasa.gov/>