Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I

Sommersemester 2010/2011
Übungsaufgaben 2
J. Wilms
17. Mai 2011

Frage 1: *Mond und Finsternisse*

a) Vergleichen Sie die Anziehungskraft der Sonne auf den Mond mit der der Erde auf den Mond.

b) Die Eintrittsphase der Bedeckung des Jupiter durch den Mond, d.h. die Zeit, die der Mond benötigt, den Jupiter vollständig zu bedecken, dauere 90 s. Berechnen Sie den Winkeldurchmesser des Jupiters.

Benutzen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Mondes und vernachlässigen Sie die Bewegung der Erde. Die mittlere Entfernung Erde-Mond beträgt 60.25 Erdradien, der mittlere Winkeldurchmesser des Mondes ist $31'$. Der siderische Monat dauert 27.32 Tage.

c) Mondfinsternisse:

- Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit es zu einer Mondfinsternis kommt?
- Wie lange dauert eine mittlere totale Mondfinsternis?
  Tip: Berechnen Sie zunächst die Länge des Schattens (Erdmittelpunkt bis zur Spitze) und dann den Winkelradius des Schattens an der Mondbahn und vergleichen mit der Winkelgeschwindigkeit des Mondes.

d) Sonnenfinsternisse:

- Welche Arten von Sonnenfinsternissen gibt es? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit es zu einer totalen Sonnenfinsternis kommt?
- Unter welchen Bedingungen wird die maximale Länge der Totalität erreicht? Wie lange dauert sie?
  (Zahlenwerte: Entfernungen Mond–Erde: Perigäum = 356 000 km, Apogäum = 407 000 km, Entfernungen Sonne–Erde: Aphel = 152.1 Mio. km, Perihel = 147.1 Mio. km, Durchmesser: $R_{\oplus} = 6378\,\mathrm{km}$, $R_{☾} = 0.272 R_{\oplus}$, $R_{\odot} = 109 R_{\oplus}$)
- Zur Diskussion in der Übungsstunde: Wie viele Sonnenfinsternisse treten pro Finsternisperiode auf? Welche Finsternisse sind häufiger, Sonnen-oder Mondfinsternisse? Welche Art von Finsternissen können Sie von einem gegebenen Ort auf der Erdoberfläche häufiger beobachten?

Frage 2: *Geschwindigkeit auf Keplerbahn, Drehimpulserhaltung*

In der Vorlesung wurde diskutiert, dass das 2. Keplersche Gesetz eine unmittelbare Folge der Drehimpulserhaltung während der Bahnbewegung auf einer Keplerbahn ist. Es gilt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \tag{2.1}$$

wobei dA/dt die Sektorgeschwindigkeit ist, d.h. dA ist die Fläche, die vom Radiusvektor eines Planeten auf seiner Bahn während der Zeit dt überstrichen wird und L ist der Drehimpuls.

a) Zeige durch Integration von dA/dt über einen vollen Umlauf eines Planeten der Masse m um die Sonne mit der Periode P, dass der Drehimpuls pro Einheitsmasse gegeben ist durch

$$\frac{L}{m} = \frac{2\pi ab}{P} \quad . \tag{2.2}$$

wo a und b die große und kleine Halbachse der Bahnellipse sind, die die Gesamtfläche $A = \pi ab$ hat.

Tip: Mit etwas Nachdenken können Sie $\int dA/dt\, dt$ *ohne* Kenntnis des zeitlichen Verlaufs von dA/dt direkt hinschreiben ohne ein Integral "knacken" zu müssen...

b) Zeige mit Hilfe von Gl. (2.2), dass die Bahngeschwindigkeiten im Perihel und im Aphel gegeben sind durch

$$v_{\text{perihel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{und} \quad v_{\text{aphel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad . \tag{2.1}$$

c) Bestimme Perihel- und Aphelgeschwindigkeit der Erde ($a_{\oplus} = 1$ AU, $e_{\oplus} = 0.017$, $P_{\oplus} = 365.26$ Tage), sowie des Kometen Ikeya-Seki mit $e = 0.99991$, $a = 88.9$ AE und $P = 838.2$ Jahre.

Frage 3: *Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes für den Fall einer dominierenden Zentralmasse*

a) Auf der Erde beträgt die Länge eines Jahres 365.26 Tage. Berechne die Länge des Mars-Jahres aus dem 3. Keplerschen Gesetz. Die große Halbachse der Marsbahn beträgt $a_{\mars} = 1.524$ AU.

b) Die allgemeine Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes in Newtons Formulierung findet sich im WWW auf den Handouts zur Vorlesung. Hier soll eine vereinfachte Form dieses Gesetzes hergeleitet werden für den Spezialfall, dass eine der beiden beteiligten Massen sehr groß ist und das System dominiert ($m_1 \gg m_2$).

- Bestimme zunächst den Bahnradius der Sonne, der auf die Gravitationskraft Jupiters zurückgeht. Drücke diesen in Einheiten des Sonnenradius aus ($R_{\odot} = 700000$ km). Nimm den Jupiterorbit als kreisförmig an, mit einem Bahnradius von 5.2 AU bei einer Masse von 318 Erdmassen. Die Masse der Erde ist $m_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$ kg. Die Masse der Sonne beträgt $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg. Inwieweit ist demnach die Vereinfachung $M_{\odot} \gg m_2$ gültig für alle Massen m_2 im Sonnensystem?
- Nach den obigen Ergebnissen kann angenommen werden, dass der massive Zentralkörper stationär ist. Zeige, dass aus der Bedingung, dass die Gravitationskraft des zentralen Körpers auf den Planeten gleich der Zentripetalkraft auf der Planetenbahn ist, eine vereinfachte Form von Keplers 3. Gesetz abgeleitet werden kann.