Einführung in die Astronomie II

Sommersemester 2007
Übungsaufgaben 2 – Musterlösung

Nützliche Konstanten

Ohne Garantie auf Vollständigkeit!

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Sonnenleuchtkraft	$L_\odot = 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
Absolute Helligkeit der Sonne	$M_\odot = 4.8\,\mathrm{mag}$
Erdmasse	$M_\oplus = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Frage 1: *Aktive Galaxien*

a) Seyfert-Galaxien zeigen zwei Arten von Emissionslinien in ihren Spektren: "Dünne Linien" ("narrow lines") mit typischen Breiten von $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.001$ und "breite Linien" ("broad lines") mit typischen Breiten von $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.01$. Man vermutet, daß die Linienemission von heißen Wolken herrührt, die sich mit hoher Geschwindigkeit in Bezug auf unsere Sichtlinie bewegen. Die Linien sind verbreitert, da sich einige der Wolken mit hoher Geschwindigkeit auf uns zu, andere aber von uns weg bewegen. Die Summe der Emissionen der Einzelwolken erzeugt dann das beobachtete Profil. Benutze die Dopplerformel, um die Geschwindigkeitsdispersion der für die dünnen und die breiten Linien verantwortlichen Wolken zu bestimmen.

Lösung: Mit Hilfe der Dopplerformel

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \tag{s1.1}$$

finden wir $v_{\mathrm{Narrow}} = 300\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und $v_{\mathrm{Broad}} = 3000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

b) Bei welcher Entfernung vom Zentrum des AGN befinden sich die Wolken? Nimm dazu an, daß sich die Wolken auf Kreisbahnen um ein Schwarzes Loch mit $10^7\,M_\odot$ bewegen.

Lösung: Im Fall der Bewegung auf Kreisbahnen ist

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{so daß} \quad r = \frac{GM}{v^2} \tag{s1.2}$$

Mit $M = 10^7\,M_\odot = 2 \times 10^{37}\,\mathrm{kg}$ ergibt sich für die breiten Linien $r_{\mathrm{BLR}} = 1.5 \times 10^{14}\,\mathrm{m} = 0.005\,\mathrm{pc} \sim 1000\,\mathrm{AU}$ und für die dünnen Linien $r_{\mathrm{NLR}} = 1.5 \times 10^{16}\,\mathrm{m} = 0.5\,\mathrm{pc}$.

c) Akkretion ist sehr effizient bei der Umwandlung von potentieller Energie in Strahlung. Die bei Akkretion freiwerdende Energie wird häufig in Einheiten der relativistischen Ruhemasse angegeben. Überzeuge Dich, daß die Leuchtkraft des AGN als $L = \eta \dot{M} c^2$, geschrieben werden kann, wo η die sogenannte "Effizienz" des Akkretionsprozesses ist und wo $\dot{M} = dM/dt$ die Massenakkretionsrate ist, d.h. die pro Zeiteinheit akkretierte Masse. Typischerweise ist für Akkretion $\eta = 0.1$. Wie viel Masse muß akkretiert werden, um die Leuchtkraft des Quasars 3C 273, $L = 10^{12}\,L_\odot$, zu erklären $L_\odot = 4 \times 10^{26}$ W?

Lösung: Nach Einstein ist die Ruheenergie gegeben durch $E = mc^2$. Wenn daher eine Masse Δm während eines Zeitintervalls Δt in Energie verwandelt wird, ist die freigesetzte Leistung

$$P = \frac{\Delta m c^2}{\Delta t} \tag{s1.3}$$

Der Grenzwert $\lim_{\Delta t \to 0}$ ergibt die gewünschte Aussage.

Mit Hilfe der Gleichung in der Frage kann dann die Massenakkretionsrate gefunden werden:

$$\dot{M} = \frac{L}{\eta c^2} = 4 \times 10^{22}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 0.7\,M_\odot\,\mathrm{year}^{-1} \tag{s1.4}$$

Frage 2: *3K Strahlung in der Vergangenheit*

Die Spektralverteilung der Schwarzkörperstrahlung ist gegeben durch

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \tag{2.1}$$

a) Zeige, daß die Spektralform der Schwarzkörperstrahlung bei Rotverschiebung beibehalten wird und daß $T(z) = T(\text{heute})(1 + z)$.

Lösung: Es gilt

$$\lambda_\mathrm{o} = \lambda_\mathrm{e}(1 + z) \tag{s2.1}$$

wo λ_e die emittierte und λ_o die beobachtete Wellenlänge ist.

Zum Zeitpunkt der Emission ist die in den Wellenlängenbereich $\lambda_\mathrm{e}, \lambda_\mathrm{e} + d\lambda_\mathrm{e}$ emittierte Energie gegeben durch

$$dE = \frac{2hc^2/\lambda_\mathrm{e}^5}{\exp(hc/\lambda_\mathrm{e} kT) - 1} d\lambda_\mathrm{e} \tag{s2.2}$$

gemessen wird jedoch in $\lambda_\mathrm{o}, \lambda_\mathrm{o} + d\lambda_\mathrm{o}$, und zwar

$$dE = \frac{(1+z)^5\, 2hc^2/\lambda_\mathrm{o}^5}{\exp((1+z)hc/\lambda_\mathrm{o} kT) - 1} \frac{d\lambda_\mathrm{o}}{1+z} \tag{s2.3}$$

da $d\lambda_\mathrm{o} = (1 + z)d\lambda_\mathrm{e}$. Da z nicht bekannt ist, interpretieren wir $T/(1 + z)$ als die heutige Temperatur des schwarzen Körpers.

Anmerkung: Aufgrund der Expansion des Universums erfährt die Strahlung zudem noch eine Zeitdilatation um einen Faktor $(1+z)$. Ferner wird die Photonendichte noch um einen Faktor $(1+z)^3$ verdünnt, so daß auch die Normierung des Spektrums bei der Expansion erhalten bleibt.

b) Die 3 K Hintergrundstrahlung wurde emittiert, als das Universum eine Temperatur von ungefähr 4000 K hatte, da damals der ionisierte Wasserstoff rekombinierte und so das Universum plötzlich für Strahlung durchlässig wurde. Was ist damit also die größte Rotverschiebung, die wir je werden messen können?

Lösung: Mit den Angaben der obigen Aufgabe ergibt sich leicht, daß $1 + z_{\max} = 4000\,\mathrm{K}/3\,\mathrm{K} \sim 1300$.

Frage 3: *Entwicklung des Universums*

Die Friedmann-Gleichung lautet

$$\dot{R}(t)^2 = +\frac{8\pi G\rho(t)}{3}R(t)^2 - kc^2 \tag{3.1}$$

a) Überzeuge Dich, daß für normale Materie ("Baryonen")

$$R(t)^3\rho(t) = \rho_0 R_0^3 \tag{3.2}$$

wo ρ_0 die heute gemessene Baryonendichte und R_0 der heutige Wert des Skalenparameters ist.

Lösung: Diese Bedingung folgt einfach aus der Erhaltung der Teilchenzahl: Die Zahl der Teilchen innerhalb eines mitbewegten Volumens des Universums mit mitbewegter Seitenlänge d ist proportional zu $d^3\rho R(t)^3$. Da sich diese Zahl bei der Expansion des Universums nicht ändert folgt die obige Behauptung.

b) Zeige, daß für den Fall des flachen materiedominierten Universums die Friedmann-Gleichung in der Form

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R_0^{3/2} R^{-1/2} \tag{3.1}$$

geschrieben werden kann.

Lösung: Für ein materiedominiertes Universum ist

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 R_0^3}{R^3}R^2 = 0 \tag{s3.1}$$

Für ein flaches Universum ist ferner $k = 0$, d.h. $\Omega = 1$. Damit ist

$$\frac{8\pi G\rho_0}{3} = \Omega_0 H_0^2 R_0^3 = H_0^2 R_0^3 \tag{s3.2}$$

so daß die Friedmann-Gleichung geschrieben werden kann als

$$\dot{R}^2 - \frac{H_0^2 R_0^3}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dR}{dt} = H_0 R_0^{3/2} R^{-1/2} \tag{s3.3}$$

c) Löse die Friedmann-Gleichung mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen und der Randbedingung $R(t = 0) = 0$ (beachte: R_0 ist *nicht* $R(0)$!). Zeige, daß für den betrachteten Fall des flachen und materiedominierten Universums das Universum bis in alle Ewigkeiten expandieren wird und daß das heutige Alter des Universums (das "Weltalter") durch

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{3.4}$$

gegeben ist.

Lösung: Trennung der Variablen ergibt

$$\int_0^{R(t)} R^{1/2}\,dR = H_0 R_0^{3/2} t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} R^{3/2}(t) = H_0 R_0^{3/2} t \tag{s3.4}$$

so daß

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3H_0}{2}\, t \right)^{2/3} \tag{s3.5}$$

und damit $R(t \to \infty) = \infty$. Da heute $R(t_0) = R_0$, kann t_0 durch einfaches Auflösen dieser Gleichung gefunden werden.

d) Berechne mit Hilfe des heutigen Wertes von H_0 das Weltalter eines flachen, materiedominierten Universums. Vergleiche dieses mit dem korrekten Weltalter des Universums.

Lösung: Mit $H_0 = 72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc}$ ist die sogenannte Hubble-Zeit $H_0^{-1} = 13.6\,\mathrm{Gyr}$. Für ein flaches materiedominiertes Universum ergibt sich dann ein Alter von ca. 9 Gyr. Da die ältesten Kugelsternhaufen mit ca. 13.5 Gyr deutlich älter sind als 9 Gyr, wurde dieses junge Alter lange als ein Argument gegen ein flaches Universum angesehen. Erst seitdem Messungen von Supernovae und Galaxienhaufen klar gezeigt haben, daß $\Lambda \neq 0$, ist das gemessene Alter des Universums etwas älter als das der ältesten in ihm befindlichen Objekte (wie es ja auch sein sollte...).

Frage 4: *Entfernungsbestimmung*

a) Parallaxen können natürlich auch zur Bestimmung von Entfernungen in unserem Sonnensystem benutzt werden. Der Mond hat eine mittlere Entfernung von 380000 km vom Zentrum der Erde. Was ist seine Parallaxe in Bezug auf den Erdradius ($r_{\oplus} = 6378\,\mathrm{km}$)? Wie groß ist der Fehler, der bei der Herleitung der Parallaxe durch Benutzung der Näherung $\tan x \sim x$ gemacht wird?

Lösung: Die Definition des Parallaxenwinkels, p, ist

$$\tan p = r_{\mathrm{Earth}}/d = 0.01678 \quad \text{so daß} \quad p_{\mathrm{geo}} = 0.96157^\circ \tag{s4.1}$$

Wird anstelle dessen $\tan p \sim p$ gesetzt, dann ergibt sich

$$p_{\mathrm{small}} = r_{\oplus}/d = 0.01678\,\mathrm{rad} = 0.96142^\circ \tag{s4.2}$$

Der Unterschied zwischen diesen zwei Parallaxen ist 0.00015°, oder $0.54''$, so daß selbst im Sonnensystem ohne Probleme mit der Näherung kleiner Winkel gearbeitet werden kann.

b) Im Jahr 1838 bestimmte Bessel die Entfernung des Sterns 61 Cygni zu 3.16 pc. Moderne Messungen ergeben stattdessen eine Entfernung von 3.40 pc. Bestimme den Fehler (in Bogensekunden) in der Messung von Bessel.

Lösung: Die von Bessel gemessene Parallaxe ist $p_{\text{Bessel}} = 1/3.16 = 0.316''$, während der korrekte Wert $p_{\text{modern}} = 1/3.40 = 0.294''$ beträgt. Der von Bessel gemessene Parallaxenwert lag also um $0.022''$ daneben, d.h. um ungefähr 6×10^{-6} Grad. Der relative Fehler seiner Messung war 7%, in Anbetracht der technischen Möglichkeiten, die Bessel zur Verfügung standen, war dies wirklich eine extrem gute Messung!.

c) Was ist das Entfernungsmodul und die Entfernung (in Parsec) eines Sterns mit absoluter Helligkeit von +6.0 mag, dessen scheinbare Helligkeit +16.0 mag beträgt?

Lösung: Das Entfernungsmodul ist definiert über

$$m - M = 5 \log d - 5 \tag{s4.3}$$

Damit ist $m - M = -10\,\text{mag}$, so daß $\log d = 3$ und $d = 1000\,\text{pc}$.

d) Zeige mit Hilfe der Definition des Entfernungsmoduls, daß für Standardkerzen gilt

$$m = 5 \log z + C \tag{4.4}$$

wo m die scheinbare Helligkeit der Standardkerze ist, z die Rotverschiebung und wo C von ihrer absoluten Helligkeit und von H_0 abhängt.

Lösung: Das Hubble'sche Gesetz ist

$$v = H_0 d \quad \Longrightarrow \quad z = H_0 d/c \quad \Longrightarrow \quad d = cz/H_0 \tag{s4.4}$$

Für die scheinbare Helligkeit gilt aber

$$\begin{aligned} m &= M + 5 \log d - 5 \\ &= M + 5 \log(cz/H_0) - 5 \\ &= M + 5 \log(c/H_0) + 5 \log z - 5 \\ &= 5 \log z + (M + 5 \log(c/H_0) - 5) \end{aligned} \tag{s4.5}$$

Für Standardkerzen kann also ein "Hubble Diagramm" von m versus $\log z$ erstellt werden. Mit einer einfachen linearen Regression kann dann aus dem y-Achsenabschnitt H_0 bestimmt werden.

Frage 5: *Entfernungen: Supernovae*

Kernkollaps-Supernovae vom Typ II haben typische absolute Leuchtkräfte von -20 mag.

a) Was ist die scheinbare Helligkeit einer solchen Supernova, wenn sie bei einer Entfernung von 1000 pc von der Erde explodieren würde? Vernachlässige die1 Absorption im interstellaren Medium. Vergleiche Dein Ergebnis mit der scheinbaren Helligkeit der Venus (-3 mag).

Lösung: Es ist

$$m = M + 5 \log d - 5 = -10\,\text{mag} \tag{s5.1}$$

Die Supernova ist also deutlich heller als die Venus.

b) Was ist die Maximalentfernung, in der eine solche Supernova explodieren kann und noch mit dem bloßen Auge gesehen werden kann (Grenzhelligkeit 6 mag)? Vergleiche Dein Ergebnis mit dem Durchmesser der Milchstraße.

Lösung: Das Entfernungsmodul einer solchen Supernova ist $m - M = 26$ mag, was einer Entfernung von $d = 1.6 \times 10^6$ pc $= 1.6$ Mpc entspricht, also weit größer als die lokale Gruppe.

c) Derartige Supernovae sollten alle 25–50 Jahre in der Milchstraße explodieren. Die letzte Supernova in unserer Milchstraße wurde vor ca. 400 Jahren beobachtet. Was ist die Ursache für diese scheinbare Unterhäufigkeit an Supernova-Explosionen?

Lösung: Die Absorption in der Scheibe der Milchstraße ist sehr groß, so daß nur ein kleineres Volumen der Milchstraße tatsächlich unseren Beobachtungen im Optischen zugänglich ist.

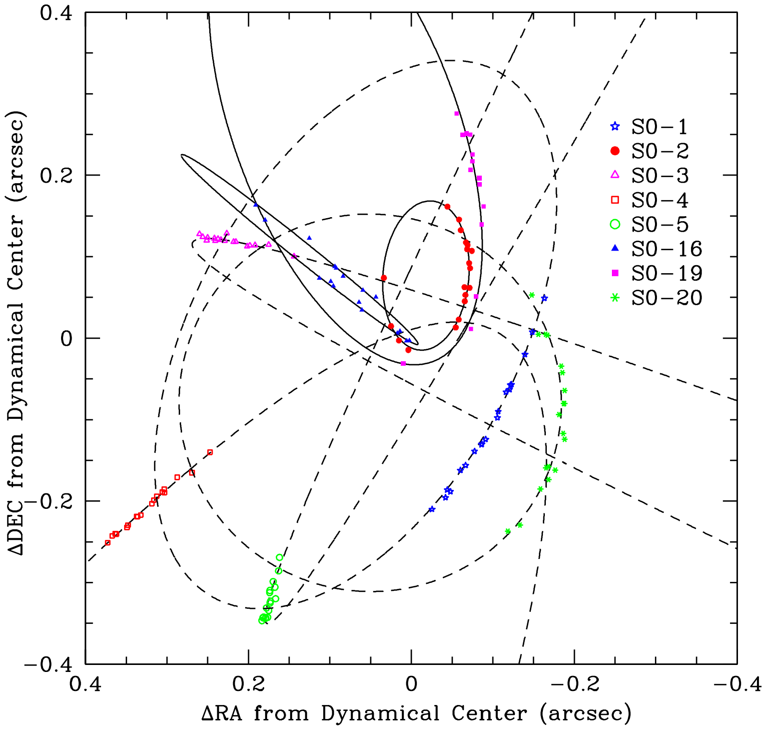
d) Wie weit weg könnte eine solche Supernova sein, um immer noch mit dem 40 cm Teleskop der Remeis-Sternwarte (Grenzhelligkeit 14 mag ohne CCD) beobachtbar zu sein? Vergleiche Dein Ergebmis mit dem der Entfernung zum Andromeda-Nebel (700 kpc) und dem Virgo-Haufen (15.7 Mpc).

Lösung: Analog zur Teilaufgabe b oben ergibt sich $d = 6 \times 10^7$ pc $= 60$ Mpc. Supernovae im Virgo-Haufen können also noch beobachtet werden.

Frage 6: *Das Zentrum der Milchstraße*

In der Vorlesung wurde die Evidenz für das Vorhandensein eines supermassiven Schwarzen Loches im Zentrum unserer Milchstraße ($d = 8.5$ kpc) angesprochen. In dieser Frage werden wir diese Evidenz und die Evidenz für weitere extreme Phänomene im Zentrum der Milchstraße etwas genauer betrachten

a) Die folgende Abbildung von A. Ghez stellt Ergebnisse von Messungen der Bahnen von Sternen in der Nähe des galaktischen Zentrums in der letzten Dekade dar



Die Abbildung zeigt, daß sich alle Sterne um das "dynamische Zentrum" der Milchstraße bewegen. Im Zentrum selbst wird im Optischen kein Objekt beobachtet. Das dynamische Zentrum liegt in der Abbildung bei der Position $\Delta RA = 0$, $\Delta DEC = 0$. Von besonderem Interesse für die Massenbestimmung ist der Stern S0-2, für den Reinhard Schödel und Mitarbeiter eine Bahnperiode von 15.2 Jahren bestimmt haben.

1. Bestimme die große Halbachse der Bahn von S0-2 aus der Abbildung. Gib diese in AU und in Lichttagen an. Aufgrund von perspektiveffekten ist die elliptische Bahn verzerrt (analog zu Doppelsternsystemen). Die projizierte Halbachse der Ellipse ist $a_{\text{projected}} = a_{\text{real}} \cos i$, wo i die Inklination ist. Für S0-2 ist $i = 36°$.

Lösung: Aus der Abbildung kann die Hauptachse der Bahn von S0-2 zu $0.18''$ abgeschätzt werden, so daß die Länge der Halbachse $\theta = 0.09''$ ist. Da

$$\theta = \frac{a_{\text{projected}}}{d} \tag{s6.1}$$

wo a die Hauptachse und d die Entfernung zum galaktischen Zentrum ist. Mit $d = 8.5\,\text{kpc}$ und $\theta = 4.36 \times 10^{-7}\,\text{rad}$ ist $a_{\text{projected}} = 0.0037\,\text{pc} = 765\,\text{AU}$. Die wahre Länge der großen Halbachse ist damit 946 AU. Da ein Lichttag einer Entfernung von $300\,000\,\text{km}\,\text{s}^{-1} \cdot 86400\,\text{s} = 2.59 \times 10^{10}\,\text{km} = 173\,\text{AU}$ entspricht hat die große Halbachse eine Länge von 5.5 Lichttagen, so daß der Stern sehr nahe an das dynamische Zentrum der Galaxie herankommt.

2. Benutze die Bahn von S0-2 um die Masse des dynamischen Zentrums der Milchstraße zu ermitteln.

Lösung: Das dritte Keplersche Gesetz ist

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2} \tag{s6.2}$$

wo a in AU, P in Jahren und M in Sonnenmassen gemessen werden. Damit ist $M_1 + M_2 = 3.66 \times 10^6\,M_\odot$. Da Sterne typische Massen von $M \sim 1\,M_\odot$ haben, was hier vernachlässigbar ist, folgt, dass die Masse der Quelle im dynamischen Zentrum der Milchstraße $3.66 \times 10^6\, M_\odot$ beträgt. Damit haben wir Evidenz für das Vorhandensein von einigen Millionen Sonnenmassen innerhalb eines Volumens, daß kleiner als 5.5 Lichttage ist, d.h. die Größe des Sonnensystems hat. Aus diesem Grund wird davon ausgegangen, daß das Objekt im Zentrum der Milchstraße ein Schwarzes Loch sein muß.

b) Nahe des Galaktischen Zentrums befindet sich ein Ring aus molekularem Gas mit einer geschätzten Masse von $10^7\, M_\odot$ und einem Durchmesser von 200 pc. Dieser Ring expandiert mit einer Geschwindigkeit von $150\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Berechne die kinetische Energie dieses Rings. Warum wird seine Existenz als Evidenz für häufige Supernova-Explosionen im Galaktischen Zentrum gesehen? Bestimme den Zeitpunkt dieser Explosionen unter der Annahme sphärischer Expansion und unter der Annahme, daß die Expansion nicht durch Reibung an Material in der Milchstraße gebremst wurde.

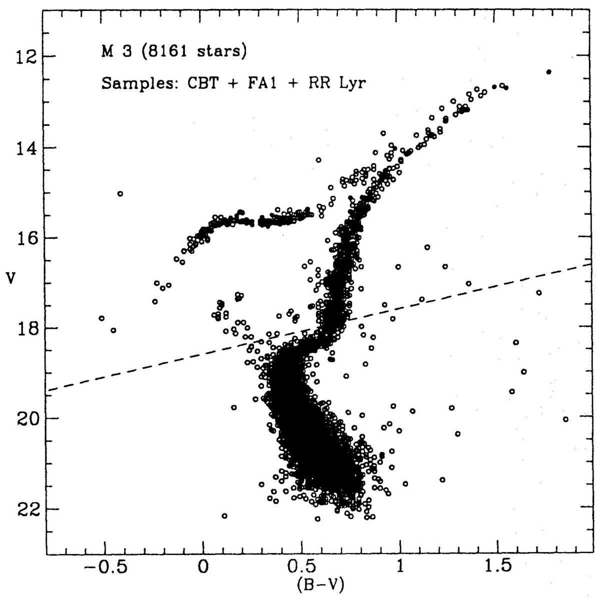
Lösung: Die kinetische Energie des Rings ist

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = 2.25 \times 10^{47}\,\mathrm{J} \tag{s6.3}$$

Eine Supernova liefert typischerweise 10^{46} J an Energie. Da es keinen anderen Mechanismus gibt, der so viel Energie sehr schnell abgibt, wird davon ausgegangen, daß der Ring durch viele Supernovaexplosionen im Zentrum verursacht wird. Diese Annahme wird auch durch Beobachtungen sehr vieler Supernova-Überreste im Galaktischen Zentrum gestützt.

Der Radius des Rings ist $r = 100\,\mathrm{pc} = 100\,\mathrm{pc} \cdot 3 \times 10^{16}\,\mathrm{m\,pc^{-1}} = 3 \times 10^{18}\,\mathrm{m}$. Die Expansionsgeschwindigkeit ist $v = 150\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, so daß die Explosionen vor $r/v = 2 \times 10^{13}\,\mathrm{s} \sim 600000$ Jahren stattfanden. Da die Milchstraße ein Alter von 10 Milliarden Jahren hat, war dies vor sehr kurzer Zeit!

Frage 7: *Sternentwicklung*

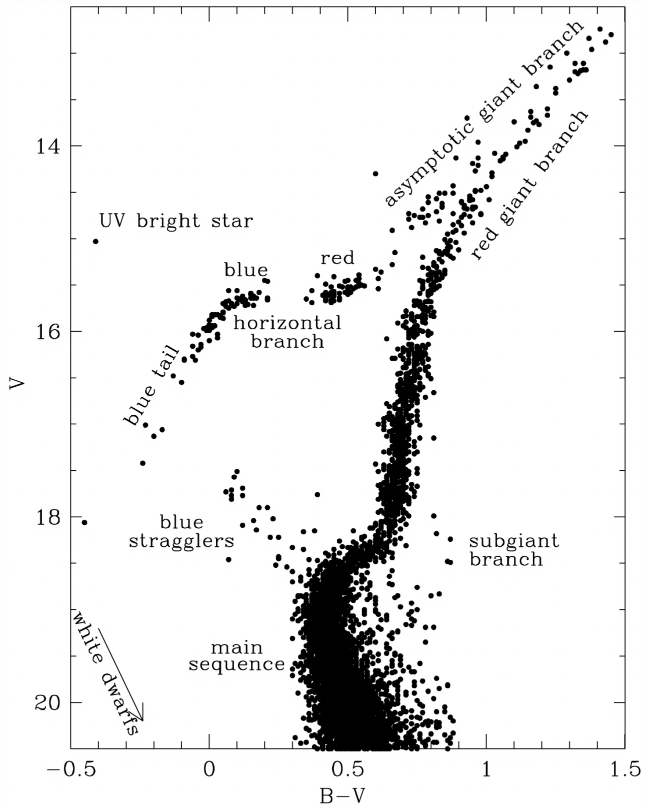


In Farben-Helligkeits-Diagrammen (FHDs) wird auf der x-Achse die Differenz der Helligkeiten von Sternen in zwei verschiedenen Filtern (z.B. im Blauen und im Visuellen) aufgenommen werden. Da Sternspektren genähert Schwarzkörperspektren sind, ist diese Differenz Temperaturabhängig, d.h. ein FHD entspricht praktisch einem Hertzsprung-Russell-Diagramm.

a) Die Abbildung zeigt das FHD des Kugelsternhaufens M3. Identifiziere im Diagramm den Horizontalast, in dem auch die RR Lyrae-Sterne zu finden sind. Bestimme mit den in der Vorlesung angegebenen Daten für RR Lyr Sterne die Entfernung von M3.

Lösung: Der Horizontalast ist bei einer scheinbaren Helligkeit von ca. 15.5 mag. Die absolute Helligkeit der RR Lyr-Sterne ist 0.6 mag laut den Vorlesungsfolien in Handout 15. Damit ergibt sich ein Entfernungsmodul für M3 von $m - M = 14.9$ mag und somit eine Entfernung von $d = 9500$ pc.

b) Identifiziere im FHD von M3 Sterne in den verschiedenen Stadien ihrer Entwicklung, insbesondere die Hauptreihe, die Roten Riesen und den AGB.



Lösung:

siehe Moehler, 2001, PASP 113, 1162, `http://adsabs.harvard.edu/abs/2001PASP..113.1162M`

Die anderen Komponenten (horizontal branch, blue tail und die blue stragglers) wurden in der Vorlesung nicht besprochen.